

30-0059

o. PROF. DR.-ING. F. S. ROSTÁSY - TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
LEHRSTUHL UND INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
Neue Bezeichnung: INSTITUT FÜR BAUSTOFFE, MASSIVBAU U. BRANDSCHUTZ

B I B L I O T H E K

Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz
der Technischen Universität Braunschweig
Beethovenstraße 52
D-3300 Braunschweig

Forschungsvorhaben Ro 288/9

der Deutschen Forschungsgemeinschaft

"Einfluß der periodischen Schwellbe-
anspruchung auf das Kriechen von Beton
unter besonderer Berücksichtigung der
Frequenz."

ABSCHLUSSBERICHT

erstattet von

o. Professor Dr.-Ing. F.S. Rostásy
Dipl.-Ing. W. Alda

Braunschweig, Dezember 1978

Inhaltsverzeichnis

	Seite
BEZEICHNUNGEN	3
Vorwort	7
1. Einleitung und Ziel der Arbeit	8
2. Ansätze zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Beton unter ein- axialer ruhender Druckbeanspruchung	10
2.1. Stoffmechanische Grundlagen	10
2.2. Definitionen	11
2.3. Wesentliche Einflüsse auf das Kriechen	15
2.4. Der zeitliche Ablauf des Kriechens unter konstanter Bean- spruchung	17
2.5. Die Rheologie und ihre Modelle	26
3. Bisherige Theorien zur Beschreibung des Kriechverhaltens unter veränderlicher Spannung	31
3.1. Theoretische Grundlagen des linearen Kriechens	31
3.1.1. Bestehende lineare Kriechtheorien	34
3.1.2. Zur Anwendung von Integralbeziehungen	43
3.1.3. Zur Anwendung von Differentialgleichungen	47
3.2. Zur Rheologie der bestehenden Kriechtheorien	53
3.3. Kritik an den bestehenden Kriechtheorien	55
3.4. Beispiel zur Anwendung der bestehenden Kriechtheorien auf das Dehnungsverhalten bei zyklischer Spannungsgeschichte	78
4. Kriechversuche mit zyklischer Spannungsgeschichte	93
5. Entwicklung eines nichtlinearen Ansatzes zur Beschreibung des Schwingkriechens	103
5.1. Voraussetzungen und Gültigkeitsbereich	103
5.1.1. Elastische Dehnung	106
5.1.2. Nichtlinearität des Kriechens	111
5.1.3. Verzögerte Elastizität	119
5.1.4. Fließen	128
5.2. Stoffmechanische Bedeutung des neuen Ansatzes	148
6. Beschreibung des Schwingkriechens durch nichtlinearen Ansatz und Vergleich mit den Spannbetonrichtlinien	150
6.1. Allgemeines	150
6.2. Kriechdehnungen unter Schwingbeanspruchung und Vergleich mit stationärem (statischem) Kriechen bei besonderer Berücksich- tigung der Frequenz	153

	Seite
6.2.1. Einfluß der Spannungszeitfunktion	153
6.2.2. Einfluß der Spannungsamplitude σ_a	165
6.2.3. Einfluß der Mittelspannung σ_m	168
6.2.4. Einfluß des Alters τ_0 bei Belastungsbeginn	174
6.2.5. Einfluß der Art des Beginns der Spannungsgeschichte . .	177
6.3. Dämpfung	183
6.4. Relaxation	187
7. Zusammenfassung	194
SCHRIFTTUM	199

BEZEICHNUNGEN

Kleinbuchstaben (lateinisch)

a	Konstante
b	Konstante
c	Konstante
d	Verlustfaktor bzw. Differentiationszeichen
d_w	wirksamer Körperdurchmesser
f	Frequenz
$f()$	Funktion von ()
g, h	Funktionen
i	Zählervariable
k	Zeitfunktion
l	Länge
m	Konstante
n	Zählervariable
t	Zeit, Beobachtungszeitpunkt
t_e , auch t^*	Entlastungsdauer

Großbuchstaben (lateinisch)

C_i	Integrationskonstante
C	Exponent
E	Elastizitätsmodul
F	Fläche
$F(\tau_0)$	Fließpotentialkenngröße
H	Heaviside-Funktion
K	Spektrum von Retardationszeiten
T_p	Periodendauer (Dauer eines Belastungszyklus)

Kleinbuchstaben (griechisch)

$\alpha_k = \frac{\epsilon_k}{\sigma}$	Kriechmaß
α_{vi}, α_{fi}	Retardationszeiten (verz. Elastizität bzw. Fließen)
β	Festigkeit
β_c	Zylinderdruckfestigkeit
δ	Dirac'sche Funktion
ϵ	Dehnung
ϵ_{el}	elastische Dehnung
ϵ_f	Fließdehnung
ϵ_{ges}	Gesamtdehnung
ϵ_k	Kriechdehnung
ϵ_s	Schwinddehnung
ϵ_v	verzögert-elastische Dehnung
$\eta_v, \eta_f, \eta_{dyn}$	Dämpferviskosität
$\eta = \frac{\epsilon_k(G(t))}{\epsilon_k(\sigma_m = konst)}$	Schwingkriechfaktor für das Kriechen infolge variabler Spannung, bezogen auf das Kriechen infolge $\sigma_m = konst.$
v	Verteilungsgröße
σ	Spannung
σ_0	Spannung zum Zeitpunkt des Belastungsbeginns
$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\beta_c}$	bezogene Spannung, Belastungsgrad
$\bar{\sigma}_0$	bezogene Oberspannung
$\bar{\sigma}_u$	bezogene Unterspannung
$\bar{\sigma}_m$	bezogene Mittelspannung
τ	Betonalter, Integrationsvariable
τ_0	Zeitpunkt der erstmaligen Belastung des Betons
τ_e	Zeitpunkt der Entlastung
τ_{ki}	Retardationszeit des i-ten Kelvin-Elements
$\varphi = \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{el}} = \varphi_k$	Kriechzahl
$\varphi(), \varphi_v(), \varphi_f()$	Funktionen der Variablen ()
φ_{fo}	Grundfließzahl (Spannbetonrichtlinien)
φ_0	Grundkriechzahl (DIN 1045)

Großbuchstaben (griechisch)

ϕ Übergangsfunktion

Indizes

el elastisch

f Fließen

k Kriechen

v verzögert-elastisch

∞ zum Zeitpunkt $\tau = \infty$ oder $t - \tau = \infty$

1. EINLEITUNG UND ZIEL DER ARBEIT

Die vielseitige Anwendung der Beton-Bauweise erfordert die gründliche Kenntnis der mechanischen Eigenschaften des Betons. Die Beziehungen zwischen Spannung und Verformung eines Werkstoffes bilden die Grundlage zur Berechnung von Spannungsverteilungen, Durchbiegungen und Verschiebungen. Hier folgt der Beton, bedingt durch seine Eigenschaften Kriechen und Relaxation einem sehr komplexen Stoffgesetz.

Betrachtet man die Forschung der vergangenen Jahrzehnte, so erkennt man, daß das viskoelastische Verhalten von Beton experimentell nahezu ausnahmslos in Dauerstandversuchen verfolgt wurde: das Kriechen unter konstanter Spannung, die Relaxation unter konstanter Verformung. Daran gemessen gibt es nur wenige Arbeiten über das Verformungsverhalten unter nichtruhender bzw. schwingender Beanspruchung, und entsprechend gering ist unser Kenntnisstand hierüber.

Die Notwendigkeit zur Verbesserung des Kenntnisstandes liegt auf der Hand: Im Regelfall sind nahezu alle Bauwerke nicht-ruhend beansprucht. Man denke an den Brückenbau und Kranbahnkonstruktionen, aber auch im Hochbau gibt es Fälle, bei denen die nichtruhenden Verkehrslasten (Windlasten etc.) einen beachtlichen Anteil zur Gesamtbeanspruchung beisteuern.

Es ist das Ziel der Arbeit, zu helfen, die Wissenslücken auf dem Gebiet des Verformungsverhaltens von Beton zu schließen. Sie widmet sich dabei den Verformungen unter zyklischen, schwellenden einaxialen Druckspannungen und geht auf theoretisch-numerischem Wege der Frage nach, ob die schwingende Belastung zu einer Steigerung der Verformungen führt und, wenn ja, in welchem Maße und unter welchen Bedingungen.

Die Beantwortung dieser Fragen erfolgt in Schritten. Zunächst ist es notwendig, die bestehenden Kriechtheorien im Hinblick auf ihre Eignung zu untersuchen, schwellende Beanspruchungen zu beschreiben. Dabei ist zu beachten, daß eine Kriechtheorie den phänomenologischen Erkenntnisstand für sowohl konstante als auch variable Spannung berücksichtigen muß. Diesem Teilziel dienen die ersten vier Abschnitte.

Im fünften Abschnitt wird dann eine modifizierte Theorie - aufbauend auf der Grundlage der irreversiblen-reversiblen Kriechtheorie [4, 47] - in der Form einer Integralgleichung entwickelt, die dann als Basis für die Auswertung dient. In der Auswertung selbst wird im sechsten Abschnitt eine umfangreiche Parameterstudie durchgeführt, die Aussagen darüber liefert, wann und unter welchen Umständen bei einer periodischen Beanspruchung von Beton mit erhöhten zeitabhängigen Verformungen zu rechnen ist.

2. ANSÄTZE ZUR BESCHREIBUNG DES KRIECHVERHALTENS VON BETON UNTER EINAXIALER RUHENDER DRUCKBEANSPRUCHUNG

2.1. Stoffmechanische Grundlagen

In der klassischen Mechanik der verformbaren Körper stand die Bearbeitung der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie im Vordergrund. Der Spannungs- und Verzerrungszustand dieser Körper ist durch die eingetragene Belastung und durch die Temperaturfelder der Umgebung eindeutig definiert. Nur in einzelnen Fällen, z. B. bei plastischen Verformungen, ist die Vorgeschichte des Spannungszustandes von Bedeutung. Eine zeitliche Änderung des Spannungs- und Verzerrungszustandes tritt bei unveränderter Belastungseinwirkung daher theoretisch nicht auf. In Wirklichkeit ist aber bei den polymeren Stoffen (Plaste) und bei fast allen mehrphasigen Stoffen (z. B. Beton) ein zeitabhängiges Verhalten zu erkennen.

Die engere Stoffmechanik ist die Lehre von den bei Einwirken von Kräften auf Körper entstehenden Bewegungen, insoweit wie sie stoffabhängig sind. Die Theorie der Stoffmechanik liefert die Rheologie, in der die allgemeinen Gesetze der Entstehung und Entwicklung der Verformungen eines beliebigen Mediums infolge beliebiger Ursachen unter beliebigen, thermodynamischen und physikalisch-chemischen Bedingungen bei Berücksichtigung des Zeitfaktors zusammengefaßt sind. Das Medium (Stoff) kann dabei ein fester, flüssiger, elastischer, plastischer oder viskoelastischer etc. Körper sein. Die Ergebnisse der Rheologie enthalten Aussagen über die Verformungen zu diskreten Zeitpunkten, z. B. direkt nach der Lasteintragung oder nach einer teilweisen oder vollständigen Entlastung, im statischen und bewegten Zustand eines Körpers. Eine exakte Lösung des Spannungs- und Verzerrungszustandes mit den Mitteln der Rheologie allein ist nur selten möglich. Die Anzahl der unbekannten Lösungsfunktionen kann durch weitreichende Idealisierungen vermindert werden.

Gemäß [1] ergibt sich folgende Einteilung der Rheologie in verschiedene Hauptgebiete (Bild 2-1). Die realen Eigenschaften eines Körpers werden dabei bestimmten "Idealkörpern" (siehe Abschnitt 2.5) zugeordnet. Inwieweit ein realer Körper in dieser Weise für die Berechnung idealisiert werden darf, muß durch besondere Untersuchungen am Baustoff (Beton) nachgewiesen werden.

Wo der Baustoff Beton am zutreffendsten eingeordnet werden kann, muß ein wesentliches Anliegen jeder stoffkundlichen Untersuchung dieses Baustoffes sein.

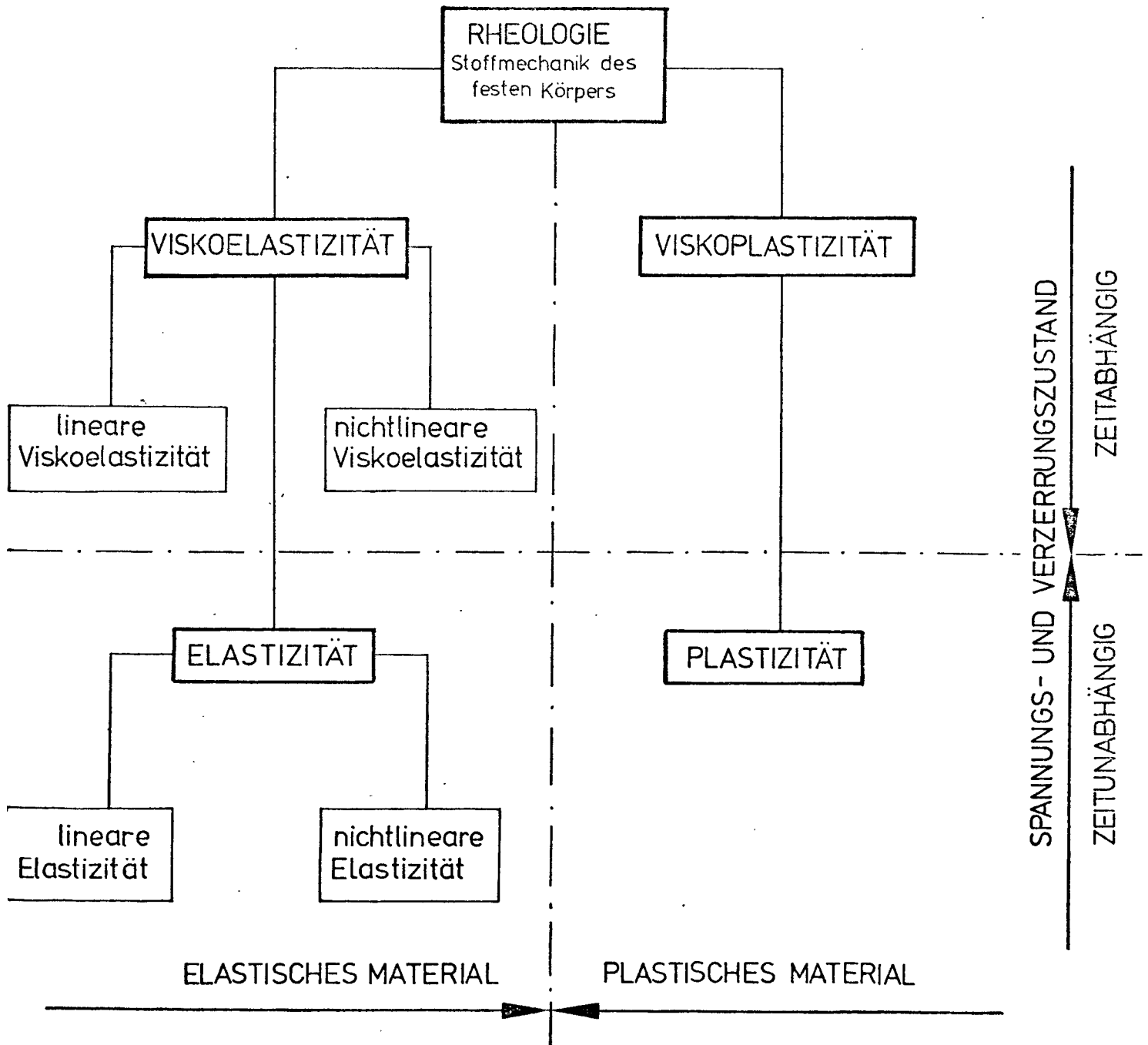


Bild 2-1 Hauptgebiete der Rheologie

2.2. Definitionen

Ein Stoff, der dem 1678 von Hooke entwickelten Gesetz

$$\sigma = \epsilon \cdot E$$

(2-1)

gehorcht, verhält sich rein "elastisch", d. h. man kennt zu jedem Zeitpunkt t die von einer Beanspruchung σ geweckte Formänderung ϵ , sofern man nur den "inneren Widerstand" E des Stoffes kennt. In der Festigkeitslehre wird üblicherweise als Maß der Formänderung (Längenänderung) die "lineare Dehnung" ϵ in der Form

$$\epsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2-2)$$

eingeführt.

Verteilt sich die aufgebrachte Längsdruckkraft gleichmäßig über den Körperquerschnitt, dann ist das spezifische Maß der Stoffbeanspruchung die Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (2-3)$$

Wenn die Querschnittsänderung vernachlässigbar klein ist, so wird diese Spannung als "Lagrangesche Spannung" definiert:

$$\sigma_L = \frac{P}{F_0} \quad (2-3a)$$

Würde man die Änderung des Probenquerschnittes berücksichtigen, so erhält man die "Eulersche Spannung":

$$\sigma_E = \frac{P}{F} \quad (2-3b)$$

Da in unserem Falle die Formänderungen immer klein sind - Beanspruchungen im Bruchbereich werden ausgeschlossen - ist auch bei Ansatz von Glg. (2-3) immer die Lagrangesche Spannung gemeint. Doch auch Glg. (2-3) ist streng genommen nur auf ein vollkommen isotropes Material ($\mu = 0$) anwendbar. Bei dem weitgehend heterogenen Baustoff Beton (s. Kapitel 5.2.) ist der Ansatz von Glg. (2-3) bereits problematisch, da lediglich die stark unterschiedlichen inneren Spannungen gemittelt und Spannungsspitzen eliminiert werden.

Schon relativ früh wurde erkannt, daß ein dauernd belasteter Betonkörper eine Verformung erfährt, die mit der Zeit anwächst. Diese Eigenschaft des Betons wird in der Literatur als zeitliche Verformung, zeitliches Nachgeben, Fließen, plastisches Fließen und Kriechen bezeichnet. Die heute allgemein übliche Bezeichnung "Kriechen" wurde von Graf aus dem Englischen "creep" übernommen.

Zum besseren Verständnis soll zunächst einmal das phänomenologische Ergebnis eines Kriechversuches unter konstanter Spannung (Bild 2-2) dargestellt werden (Einstufenversuch).

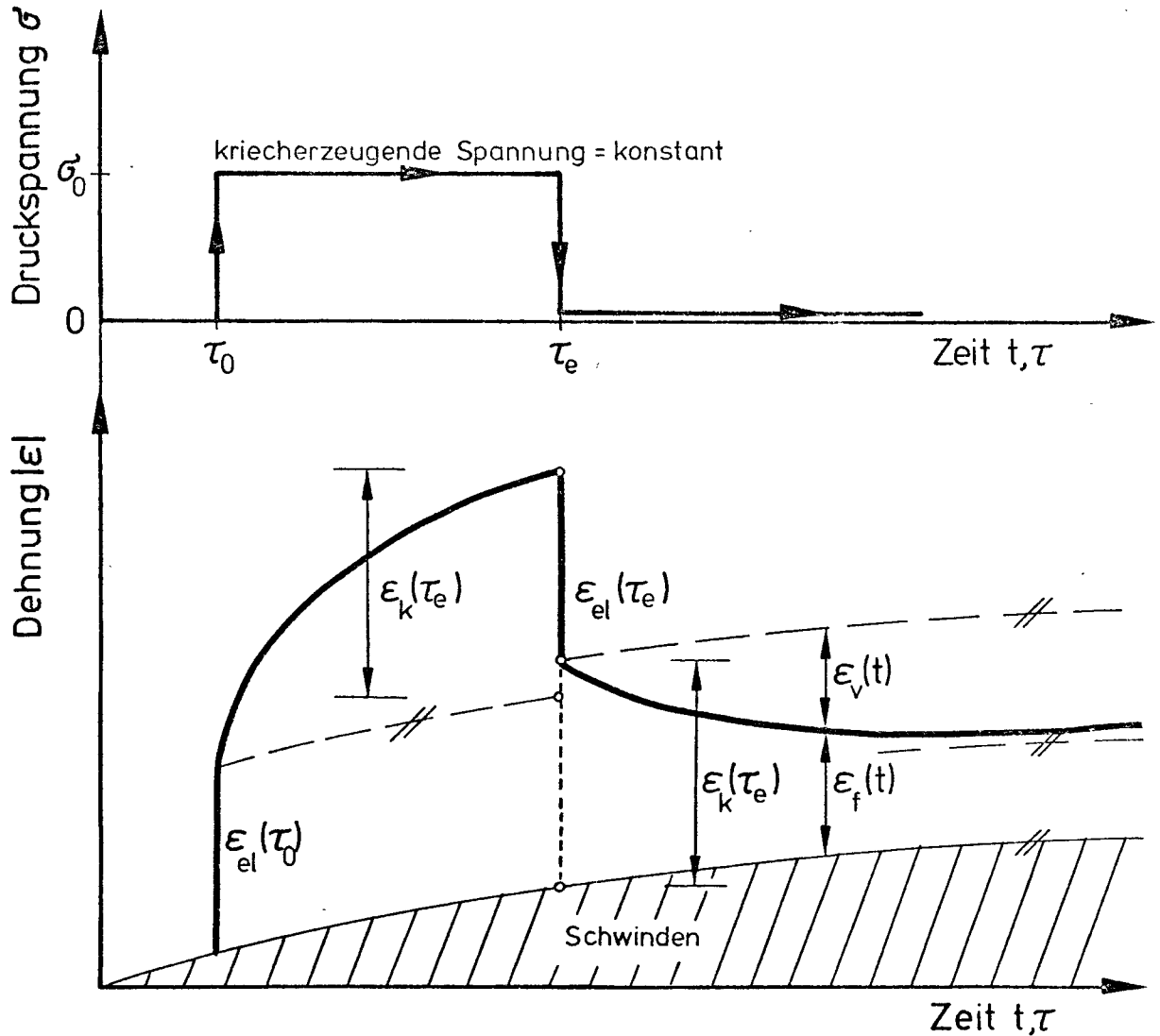


Bild 2-2 Ablauf eines Kriechversuches mit $\sigma_0 = \text{konst.}$

Der Betonkörper wird im Alter τ_0 nach seiner Herstellung mit einer konstanten kriecherzeugenden Spannung $\sigma_k = \sigma_0$ beansprucht. Im Zeitraum $t > \tau_0$ setzt sich die Kriechverformung zusammen aus:

$$\epsilon_k(t) = \epsilon_{ges}(t) - \epsilon_s(t) - \epsilon_{el}(\tau_0) \quad (2-4)$$

In Glg. (2-4) sind bereits verschiedene Voraussetzungen bzw. Hypothesen enthalten, auf die kurz eingegangen werden soll:

1. Die Schwindverformungen eines belasteten und unbelasteten Körpers sind gleich.
2. Die elastische Dehnung $\epsilon_{el}(\tau_0)$ ist von $\epsilon_{ges}(t)$ separierbar, ist also im Belastungszeitraum konstant.

Eine Beeinflussung der freien Schwinddehnungen durch das Kriechen soll voraussetzungsgemäß nicht stattfinden, obwohl diese Hypothese nur bedingt zutrifft, wie von Ruetz [2] dargelegt wird. Die meisten Forscher vernachlässigen einen Einfluß der Belastung auf die Schwinddehnungen. Bažant [3] z. B. sagt, daß die Schwinddehnungen vom linearen Alterungskriechen nicht, die Schwindspannungen hingegen stark beeinflußt werden. Da es in der vorliegenden Arbeit vornehmlich um einen Vergleich des Kriechens unter konstanter Belastung und schwingender Beanspruchung geht, braucht Hypothese 1 nicht so scharf formuliert zu werden:

- 1a. Die Schwinddehnungen werden von der Art der Belastung nicht beeinflußt und können insoweit von der Gesamtdehnung separiert werden.

Die elastische Dehnung $\epsilon_{el}(t)$ soll als idealisiert zeitlich unabhängige Größe gemäß Glg. (2-1) definiert sein. Dies wird bei einem Beton, der in höherem Betonalter belastet wird, eher zutreffen als bei einem frühzeitig belasteten Beton. Auf die Schwierigkeiten und Ungenauigkeiten bei dieser Definition wird im weiteren noch eingegangen werden (siehe Abschnitt 5.1.1.).

Entfernt man zum Zeitpunkt τ_e die kriecherzeugende Spannung σ_k vollständig, so ergibt sich die Zeit-Dehnungskurve für den Zeitraum $t > \tau_e$ gemäß Bild 2-2. In diesem Zeitraum nimmt die Dehnung ab und strebt einem Grenzwert zu. Bezeichnet man die Rückverformung als verzögert-elastische Dehnung ϵ_v , so kann man gemäß Bild 2-2 die folgende Beziehung für die Fließdehnung ϵ_f (siehe auch [4]) aufstellen:

$$\epsilon_f(t) = \epsilon_{ges}(t) - \epsilon_{el}(\tau_e) - \epsilon_v(t) - \epsilon_s(t) \quad \text{mit } t > \tau_e \quad (2-5)$$

Zutreffender wird ϵ_f als "residuale" bzw. irreversible Dehnung bezeichnet.

Ist der E-Modul sowohl von der Zeit als auch von der Spannungshöhe unabhängig, so geht Glg. (2-5) über in

$$\varepsilon_f(t) = \varepsilon_{ges}(t) - \varepsilon_{el}(\tau_0) - \varepsilon_v(t) - \varepsilon_s(t) \quad (2-6)$$

Es wurde schon früh erkannt, daß der Begriff "Kriechen" unscharf formuliert ist, weil er nicht nur bleibende, sondern auch reversible Verformungsanteile erfaßt. In diesem Zusammenhang sprach man fälschlicherweise lange Zeit - und tut dies zum Teil heute noch - von der Eigenschaft des "Rückkriechens". Heute weiß man, daß es sich bei $\varepsilon_v(t)$ um eine verzögert-elastische Verformung handelt [4]. Auf ε_v wird noch umfassend eingegangen werden.

Im bisher Gesagten wurde nur von positiven Spannungen und Verformungen gesprochen. Da es sich bei den meisten Kriechversuchen in der Literatur um Druckkriechversuche handelt, sind im folgenden - wenn nicht anders vermerkt - unter positiven Spannungen immer Druckspannungen und unter den zugehörigen Dehnungen immer Verkürzungen in bezogener Form zu verstehen.

Die verzögert-elastische Dehnung ε_v kann zwar nur nach Entlastung beobachtet werden, sie muß jedoch, sofern unter diesem Begriff nur elastische Verformungsanteile zusammengefaßt werden, bereits unter Belastung aufgebaut worden sein. Daraus ergibt sich die äußerst wichtige Erkenntnis, daß "Kriechen" gleich der Summe von "verzögert-elastischer Dehnung" und "Fließen" ist:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_v + \varepsilon_f \quad (2-7)$$

Diese Aufspaltung ist - wie noch gezeigt werden wird - vor allem dann von Bedeutung, wenn die das Kriechen auslösende Spannung zeitlich stark veränderlich ist. Dies ist üblicherweise auch in Bauwerken der Fall.

2.3. Wesentliche Einflüsse auf das Kriechen

Bei der Berechnung von Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens ist es von großer Wichtigkeit, die Größe der unter beliebigen Bedingungen zu erwartenden Kriech- und Schwindverformungen der Betone im voraus richtig abschätzen zu können. Da das Kriechen durch viele Faktoren beeinflusst wird, ist dies eine sehr schwierige Aufgabe. Außerdem sind nicht alle Einflußfaktoren in ihrer Bedeutung gleichwertig. Deswegen ist es in der praktischen Handhabung einer Theorie oder Hypothese

allgemein üblich, nur die in ihrem Einfluß erstrangigen Faktoren zu berücksichtigen und die zweitrangigen außer acht zu lassen.

Nachfolgend werden die erstrangigen Einflußfaktoren genannt, die wesentlich die Größe des Kriechens beeinflussen:

1. Das Betonalter bei Erstbelastung
2. Die Alterung des Betons
3. Die Beziehung zwischen Belastungsgrad und Kriechen
4. Die Temperatur der umgebenden Luft
5. Die relative Feuchtigkeit der umgebenden Luft

Die Punkte 1. bis 3. werden gesondert behandelt. Die Bedingungen unter Punkt 4. und 5. werden nach Belastungsbeginn konstant gehalten.

Bezüglich der weiteren Einflußfaktoren ist es unmöglich, alle Versuchsergebnisse zu analysieren. Im Zusammenhang hiermit verdienen in erster Linie die Arbeiten von Wagner [5] und Neville [6] Anerkennung, in denen u. a. eine große Anzahl von Versuchsdaten und graphischen Darstellungen verschiedener Autoren zusammengetragen werden. Außerdem sollen an dieser Stelle die Arbeiten von Nielsen [7], L'Hermite und Mamillan [8], Ali u. Kesler [9] und [10] erwähnt werden.

Die Kriechversuche werden an Prüfkörpern unterschiedlichster Formen und Abmessungen und bei unterschiedlichsten Umweltbedingungen durchgeführt. Auch die Prüfmethode selbst stimmten oft nicht überein. Eine Verallgemeinerung der so erhaltenen Versuchsergebnisse ist infolge Fehlens einheitlicher Parameter sehr schwierig. Dessen ungeachtet lassen sich trotz dieser Schwierigkeiten aus den Versuchen die nachfolgend genannten Tendenzen ableiten. Die Kriechverformungen nehmen zu bei

- a. abnehmender Luftfeuchtigkeit,
- b. Verringerung der Querschnittsabmessungen,
- c. zunehmender Grobkörnigkeit der Zuschläge,
- d. Vergrößerung der Zementmenge/m³ Beton,
- e. Vergrößerung des Wasser/Zement-Verhältnisses,
- f. Erhöhung der Betonfestigkeit.

Auf der Grundlage von Versuchsergebnissen wurden z. B. Nomogramme von Ross [11] und Ulickij [12] entwickelt. Allen diesen Verfahren, mit Hilfe von Nomogrammen o. ä. den Einfluß der zuletzt genannten Faktoren zu bestimmen, ist eine Grundtendenz gemeinsam. Sie versuchen, durch mehrere Korrekturwerte, einen bestimmten Grundparameter den jeweiligen Gegebenheiten anzupassen. Dieser Grundparameter ist im deutschen Sprachbereich die Endkriechzahl φ_{∞} , die definiert ist als ($\sigma_k = \sigma_0$):

$$\varphi_{\infty} = \frac{\varepsilon_{k\infty}}{\varepsilon_{el}} = \varepsilon_{k\infty} \cdot \frac{E}{\sigma_0} \quad (2-8)$$

Weniger durchgesetzt hat sich als Grundparameter das spezifische Kriechmaß

$$\alpha_{k\infty} = \frac{\varepsilon_{k\infty}}{\sigma_0} = \frac{\varphi_{\infty}}{E} \quad (2-9)$$

Im englischen Sprachbereich findet man häufig statt α_k auch die Bezeichnung J .

Hinsichtlich der Einflußgrößen a. bis f. wird von folgender Hypothese ausgegangen:

Der Einfluß der genannten Parameter auf das Kriechverhalten von Beton ist unabhängig von der Art der kriecherzeugenden Belastung.

2.4. Der zeitliche Ablauf des Kriechens unter konstanter Beanspruchung

Von größter Wichtigkeit für das Kriechverhalten von Beton unter einaxialer Beanspruchung ist der zeitliche Ablauf des Kriechens. In der allgemeinsten Form zeigt ein Beton, der einer konstanten Beanspruchung unterworfen wird, ein Kriechverhalten, das sich gemäß Bild 2-3 in drei Bereiche unterteilen läßt:

- primäres	}	Kriechen
- sekundäres		
- tertiäres		

Da in der vorliegenden Arbeit nur der Gebrauchsspannungsbereich interessieren soll, soll das tertiäre Kriechen - das letztendlich zum Bruch führt - nicht untersucht werden. Illston [13], der 1965 erstmalig eine Aufteilung

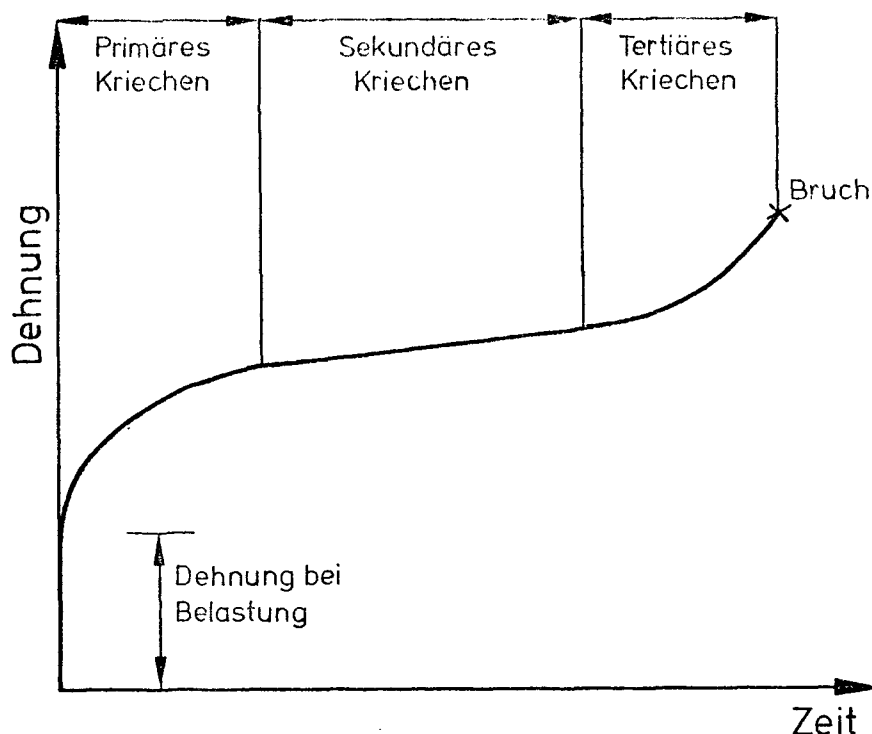


Bild 2-3 Allgemeine Form einer Dehnungs-Zeitkurve von Beton unter konstanter Beanspruchung

der Kriechverformungen gemäß Glg. (2-7) vornahm, stellte fest, daß sich die verzögert-elastische Verformung sehr rasch entwickelt und somit eher dem primären Kriechen zugeordnet werden kann, während das sekundäre Kriechen eher dem Fließanteil entspricht [6].

Im nachfolgenden werden in aller Kürze die wichtigsten Funktionen für den zeitlichen Verlauf der Kriechverformungen zusammengestellt.

Die wohl am häufigsten benutzte, erstmals von Straub [14] und Shank [15] dargelegte, Funktion ist die Potenzfunktion

$$\epsilon_k = a(t-\tau)^b \quad (2-10)$$

Diese auch in jüngster Zeit wieder sehr häufig aufgegriffene [16, 17, 18] Funktion hat zwei Besonderheiten. Zum einen besitzt sie keinen Grenzwert (Fehlen eines Endkriechwertes), und zum anderen ist sie zum Zeitpunkt $t-\tau = 0$ nicht definiert. Bažant [18] empfiehlt, hier $t-\tau \approx 0,001$ Tage zu setzen und den sich zu diesem Zeitpunkt ergebenden Kriechanteil der elastischen Verformung ϵ_{el} zuzuweisen. Friedrich [19] versah 1950 die Potenzfunktion mit einem Kriechendwert für $(t-\tau) > 1400$ Tage:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k &= a \cdot \sqrt[4]{\frac{(t-\tau)}{1400}} & \text{für } (t-\tau) \leq 1400 \text{ Tage} \\ \varepsilon_k &= a & \text{für } (t-\tau) > 1400 \text{ Tage} \end{aligned} \right\} \quad (2-10a)$$

Eine weitere übliche Zeitfunktion für das Kriechen ist der erstmals von Hanson [20] angesetzte natürliche Logarithmus

$$\varepsilon_k = a \cdot \ln[(t-\tau)+1] \quad (2-11)$$

Diese Funktion liefert ebenfalls keinen Endkriechwert, ist jedoch für jede Belastungsdauer definiert. Ein Ansatz dieser Funktion findet sich auch wieder bei Maréchal [21], Kimishima [22] und McDonald [23]. Ebenfalls bereits sehr früh (1937) wurde von Ross [11]

$$\varepsilon_k = \frac{(t-\tau)}{a+b \cdot (t-\tau)} \quad (2-12)$$

bzw. von Lorman [24] (1940)

$$\varepsilon_k = \frac{m \cdot (t-\tau)}{n + (t-\tau)} \quad (2-13)$$

für den zeitlichen Verlauf des Kriechens ein Hyperbelansatz vorgeschlagen. Beide Zeitfunktionen besitzen sowohl einen definierten Anfangs- als auch einen Grenzwert. Die Glg. (2-12) von Ross ist überaus praktisch in der Handhabung, da sich mit ihr nach der bekannten Umformung

$$\frac{t-\tau}{\varepsilon_k} = a + b(t-\tau) \quad (2-12a)$$

auf graphischem Wege die Endkriechdehnung ermitteln läßt. In Bild 2-4 sind als Beispiel einige Meßwerte aus [25] aufgetragen. Die Endkriechdehnung ergibt sich bekanntlich aus der Steigung der Tangente an die dargestellte Kurve der Meßwerte. Wie man jedoch unschwer erkennen kann, stößt die Konstruktion einer solchen Tangente auf Schwierigkeiten, da die Kurve im dargestellten Zeitbereich relativ stark von einer Geraden abweicht. Man erkennt deutlich, daß sich die Kurve mit zunehmender Versuchsdauer = Belastungsdauer erst allmählich an die Steigung anzuschmiegen scheint, die dem Endkriechmaß entspricht. In [25] wird als Endkriechdehnung $\varepsilon_{k\infty} = 0,548 \%$ angegeben. Welchen Fehler man begeht, wenn man gemäß der Beziehung

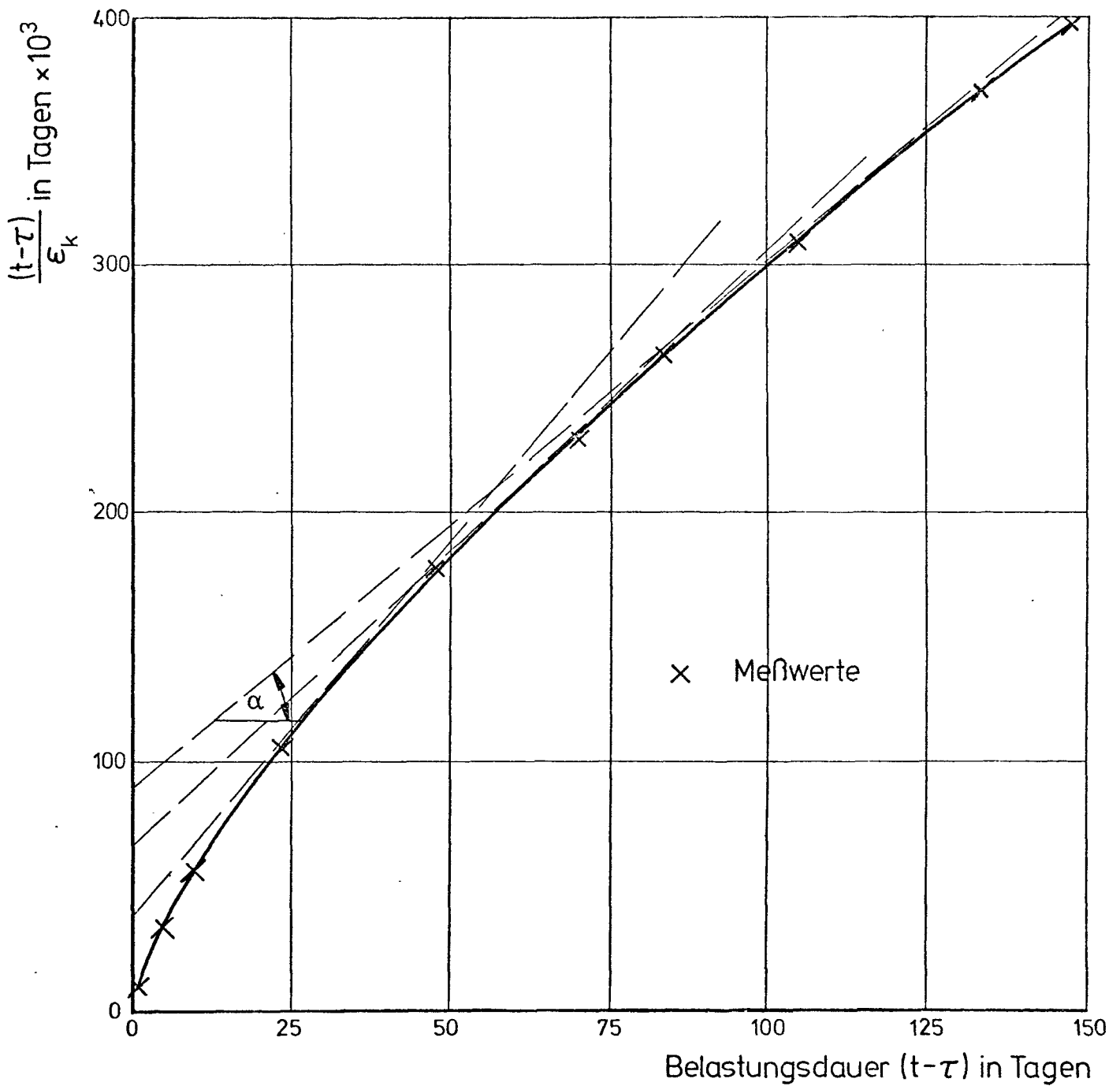


Bild 2-4 Beispiel für die Ermittlung der Endkriechdehnung nach Ross
(Beispiel aus [25], Serie O)

$$\epsilon_{k\infty} = \lim_{(t-\tau) \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a}{t-\tau} + b} = \frac{1}{b} = \cot \alpha \quad (2-14)$$

die Endkriechdehnung nach einer kürzeren Versuchsdauer bestimmt, zeigt Tabelle 2-1.

Tabelle 2-1: Fehler bei der Ermittlung der Endkriechdehnung bei kürzerer Versuchsdauer

Versuchsdauer Tage	Endkriechdehnung nach Ross ‰	Fehler %
25	0,307	- 44
75	0,417	- 24
150	0,505	- 8

Wie man sieht, sind die Abweichungen von der Endkriechdehnung beträchtlich, wenn man das Verfahren von Ross gemäß Glg. (2-14) bereits bei Versuchen mit nur kurzer Belastungsdauer anwendet.

Benutzt man andererseits das Verfahren von Ross zur Bestimmung der Endkriechdehnung, wenn man einen Kriechversuch von sehr langer Dauer durchgeführt hat, so erhält man sehr vertrauenswürdige Ergebnisse. Die dabei festgelegten Konstanten a und b in Glg. (2-12) lassen jedoch einen Vergleich des zeitlichen Kriechverlaufes gemäß Messung und Rechnung kaum mehr zu, wie Bild 2-5 deutlich zeigt. Die Übereinstimmung des Verlaufes in den ersten drei Monaten ist sehr unbefriedigend.

In abgewandelter Form ist der Hyperbelansatz auch in den amerikanischen Empfehlungen des (ACI Committee 209) [46] verwendet worden:

$$\epsilon_k = \frac{(t-\tau)^{0,6}}{10-(t-\tau)^{0,6}} \quad (2-15)$$

Im deutschen Sprachbereich sehr häufig verwendet, und zwar erstmals von Dischinger [26], ist der Versuch, den zeitlichen Verlauf des Kriechens als einen gedämpften Vorgang mit Hilfe einer Exponentialfunktion zu betrachten:

$$\epsilon_k = \epsilon_{\infty} (1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}}) \quad (2-16)$$

Wie man durch Lösung der Differentialgleichung erkennt, ist dies nichts anderes als die Dehnungsantwort eines Kelvin-Elementes auf eine bestimmte konstante vorgegebene Spannung σ , wobei α in (2-16)

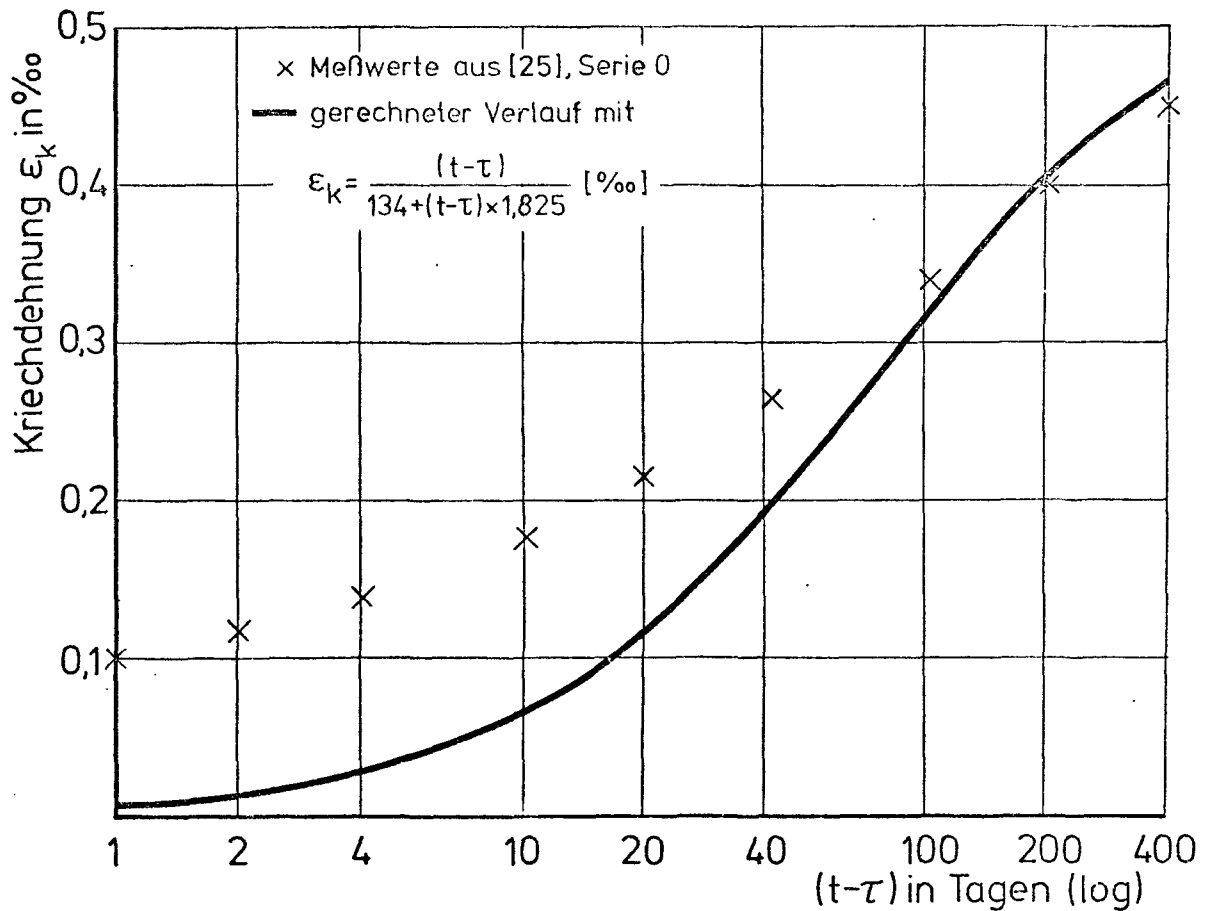


Bild 2-5 Vergleich von Messung und Kriechverlauf nach Ross [11], wenn die Endkriechdehnung nach dem Verfahren von Ross bestimmt wurde.

$$\alpha = \tau_k$$

(2-17)

die Retardationszeit darstellt, mit der die Antwort verzögert wird. Auf die spezifische Eigenart des Dischinger-Ansatzes bei der Anwendung von Glg. (2-16) bei zeitlich veränderlicher Spannung wird noch eingegangen werden.

Die Funktion gemäß Glg. (2-16) ist zu jedem Zeitpunkt (t-τ) definiert und besitzt den Grenzwert $\epsilon_{k\infty}$. Glg. (2-16) besitzt gewisse mathematische Vorteile, auf die später noch eingegangen werden wird. Aroutyunyan [27] setzt für den zeitlichen Verlauf des Kriechens die gleiche Funktion (2-16) an. Während Dischinger $\tau_k = 365$ Tage setzt, schwankt τ_k bei Aroutyunyan zwischen 25 und 38 Tagen. Trost [28] gewann durch Reihenschaltung von bis zu 4 Kelvin-Elementen

folgenden Ansatz für den zeitlichen Verlauf des Kriechens bei konstanter Beanspruchung:

$$\epsilon_k = \epsilon_{k\infty} \cdot \sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(1 - e^{-\frac{(t-T)}{\tau_{ki}}}\right) \quad (2-18)$$

Diesen Ansatz greifen in verallgemeinerter Form (Entwicklung der Retardationszeiten als Dirichlet'sche Reihe) auch Bažant und Wu [29] auf.

Ein Verfahren, wie man mit Glg. (2-18) einen beliebigen zeitlichen Verlauf approximieren kann, wurde von Haas [30] angegeben. Für eine Reihe von 4 Kelvin-Elementen benötigt man hierzu lediglich Funktionswerte und die erste Ableitung der Funktion an drei ausgewählten Zeitpunkten, die in etwa mit den zu berechnenden Retardationszeiten übereinstimmen sollten. Dieses Verfahren eignet sich auch sehr gut für eine Handrechnung, wenn man zur Ermittlung der ersten Ableitung eine Regressionsanalyse unter Verwendung von Glg. (2-10) durchführt.

Eine Variation von Glg. (2-16) wurde von Pfefferle [31] angesetzt, indem der Einfluß der Belastungsdauer im Exponenten nichtlinear angenommen wurde.

$$\epsilon_k = \epsilon_{k\infty} \cdot \left(1 - e^{-a\sqrt{t-T}}\right) \quad (2-19)$$

Eine zusammenfassende Darstellung der vier wichtigsten Funktionsarten für den zeitlichen Verlauf des Kriechens unter konstanter Beanspruchung gibt die Tabelle 2-2.

Tabelle 2-2 Wichtigste Funktionen zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufes des Kriechens unter konstanter Beanspruchung.

Funktion	Gleichung	bei Belastungsbeginn definiert	Endkriechwert
$a \cdot (t-T)^b$	(2-10)	nein	nein
$a \cdot \ln[(t-T)+1]$	(2-11)	ja	nein
$\frac{(t-T)}{a + b \cdot (t-T)}$	(2-12)	ja	ja
$\epsilon_{k\infty} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-T}{\alpha}}\right)$	(2-16)	ja	ja

Bezogenes Kriechen $\bar{\varphi} = \frac{\varepsilon_k(t-\tau)}{\varepsilon_k(365d)}$

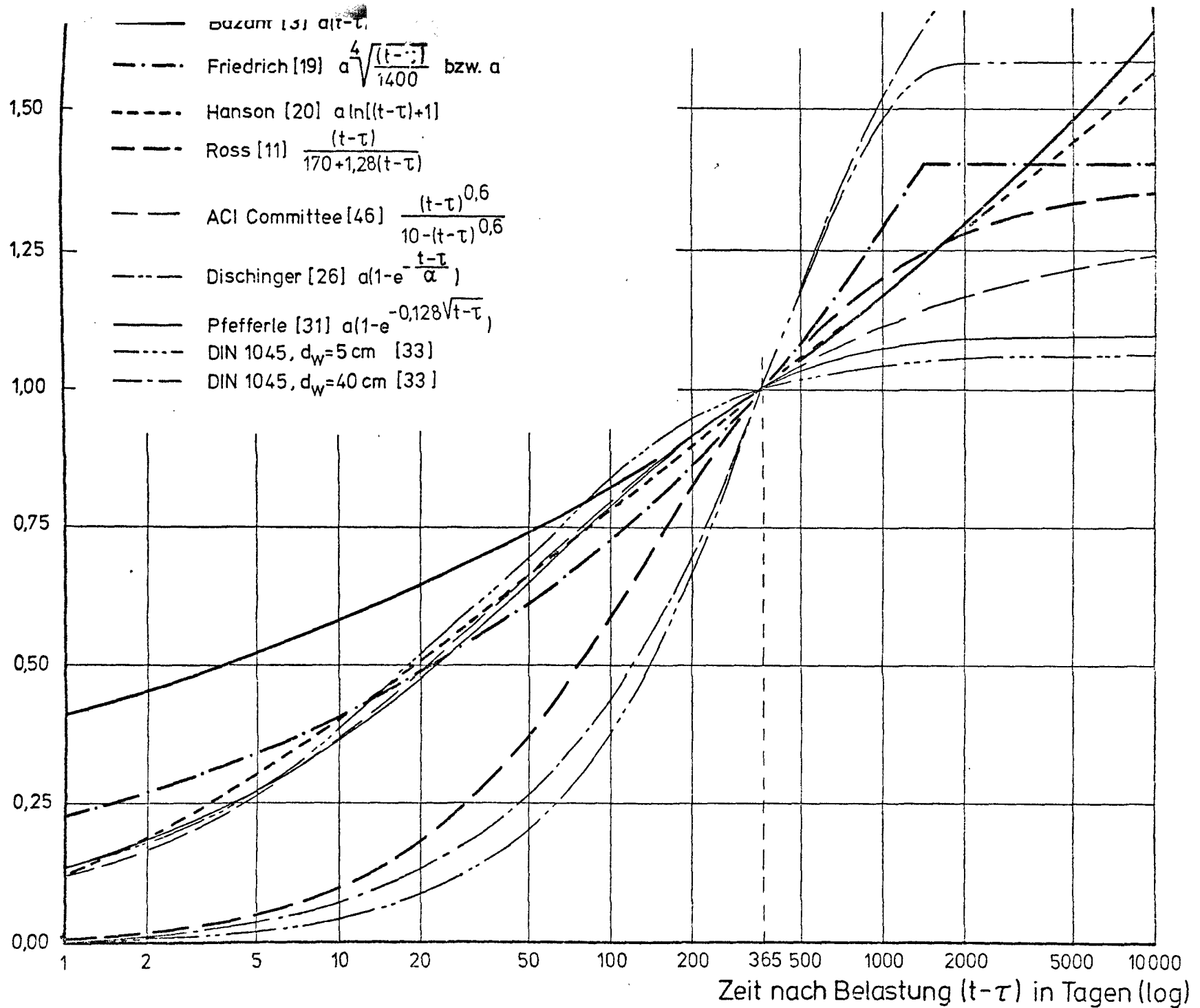


Bild 2-6 Beispiele für den zeitlichen Verlauf des Kriechens

Wie unterschiedlich die Ergebnisse gemäß den einzelnen Ansätzen sind, zeigt Bild 2-6. Um einen anschaulichen Vergleich zu erhalten, wurden die Kriechdehnungen in bezogener Form dargestellt, indem die jeweilige Dehnung zum Zeitpunkt $(t-\tau)$ auf die Dehnung zum Zeitpunkt $(t-\tau) = 365$ Tage bezogen wurde. Die Einteilung der Zeitachse erfolgt in diesem und anderen Bildern, in denen Zeitabläufe dargestellt sind, aus Gründen der Übersichtlichkeit im logarithmischen Maßstab. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Verläufen sind teilweise beträchtlich, da sie vom einzelnen Forscher aus experimentellen Werten abgeleitet wurden. In ihnen sind also bereits Einflüsse von Parametern, wie z. B. wirksamer Körperdurchmesser d_w , Klima, Belastungsgrad σ_0/β_c etc., versteckt enthalten. Den Einfluß von d_w erfaßt z. B. die DIN 1045 [33] durch unterschiedliche Zeitverläufe. Bei geringem d_w erfolgt ein stärkeres, bei großem d_w ein schwächeres Anfangskriechen.

Die wichtigsten Anforderungen an die Zeitfunktion können allgemein unter Berücksichtigung der phänomenologischen Erkenntnisse wie folgt formuliert werden:

1. Die Zeitfunktion muß so gewählt werden, daß mit ihr die gemessenen Werte optimal angenähert werden können (Methode der kleinsten Fehlerquadrate).
2. Die Kurve sollte bei Belastungsbeginn, also im Ursprung definiert sein.
3. Die Kriechdehnungen sollen mit zunehmender Belastungsdauer monoton zunehmen.
4. Die Kriechgeschwindigkeit sollte monoton abnehmen.

Diese Bedingungen wurden erstmals von Kajfasz und Szulc [34] 1970 in mathematischer Hinsicht formuliert und können folgendermaßen geschrieben werden:

$$1. S = \sum_{i=0}^n [f(t_i - \tau) - \bar{f}(t_i - \tau)]^2 = \text{Minimum} \quad (2-20)$$

mit $f(t_i - \tau) = \epsilon_k$ (gerechnet)

mit $\bar{f}(t_i - \tau) = \epsilon_k$ (gemessen)

$$2. f(0) = 0 \quad (2-21)$$

$$3. f'(t - \tau) \geq 0 \quad (2-22)$$

$$4. f''(t - \tau) \leq 0 \quad (2-23)$$

Zu 1. bzw. Glg. (2-20) ist zu sagen, daß die Methode der kleinsten Fehlerquadrate nur dann optimale und sinnvolle Ergebnisse liefert, wenn die Meßwerte

$\bar{f}(t_i - \tau)$ im gesamten betrachteten Zeitbereich gleichmäßig verteilt sind.

2.5. Die Rheologie und ihre Modelle

Die Untersuchung des Formänderungsverhaltens des Baustoffes Beton ist in ihren Anfängen sehr wesentlich von empirischen Formulierungen begleitet worden. Zur mathematischen Formulierung von phänomenologischen Erkenntnissen hat auch beim Betonkriechen in jüngerer Zeit die Rheologie einen wichtigen Beitrag geliefert.

Die Rheologie führt zur Beschreibung des Formänderungsverhaltens eines Stoffes sogenannte Idealkörper ein. Die Idealkörper zeigen ein spezifisches Verhalten der realen Materie in besonders augenfälliger Weise, so daß man sofort geneigt ist, alle Nebenverformungen zu vernachlässigen.

Der bekannteste Idealkörper ist die Feder (Schrauben-) zur Beschreibung der Elastizität. Liegt eine lineare Elastizität vor, so gilt das Hooke'sche Gesetz. Nach ihm wird der Idealkörper auch Hooke'scher Körper (s. Bild 2-7) genannt. Es sei am Rande bemerkt, daß es außer der linearen Elastizität auch ein nichtlinear-elastisches Verhalten gibt (hyperelastisch, hypoelastisch).

① Hooke'sche Feder :

Modell :

Arbeitslinie :

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

(linear elastisch)

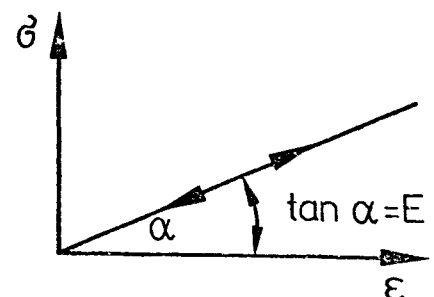


Bild 2-7 Hooke'scher Körper

Das viskose Fließen eines Stoffes, also das Verformungsverhalten einer Flüssigkeit (Fluid), kann durch einen Flüssigkeitsdämpfer dargestellt werden, (s. Bild 2-8).

② Newton'scher Dämpfer :

Modell :

Arbeitslinie :

$$\sigma = \eta_{\text{dyn}} \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta_{\text{dyn}} \dot{\varepsilon}$$

(linear viskos)

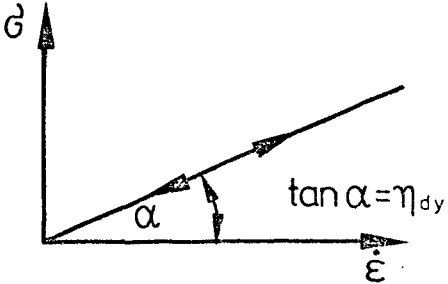
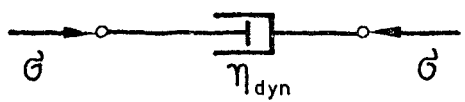


Bild 2-8 Newton'scher Dämpfer

Unter Voraussetzung einer konstanten Viskosität η_{dyn} des Fluids, bezeichnet man dieses Modell als Newton'schen Dämpfer (s. auch DIN 1342 [100] und DIN 13 342 [132]). Er erzeugt nur Wärme (dissipative Energie). Auch hier gibt es analog zum Hooke'schen Körper nichtlineare Charakteristiken in der Arbeitslinie. Aufgrund der Analogie von Schichtenströmung und Dehnströmung (Stauch-) seien nur die Begriffe "pseudoplastisch" und "dilatant" erwähnt, auf die später noch eingegangen werden wird.

Der dritte Idealkörper entspricht dem Trockenreibungsdämpfer (Coulomb-Dämpfer) und wird überwiegend als St.-Venant'scher Körper bezeichnet (s. Bild 2-9). Er begrenzt die aufbringbare Spannung und verkörpert daher einen idealplastischen Stoff.

③ St.-Venant'scher Körper :

Modell :

Arbeitslinie :

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \sigma^* \text{ (Fließspannung)} \\ \sigma < \sigma^* &\rightarrow \varepsilon = 0 \\ \sigma = \sigma^* &\rightarrow \varepsilon \text{ undefiniert} \end{aligned}$$

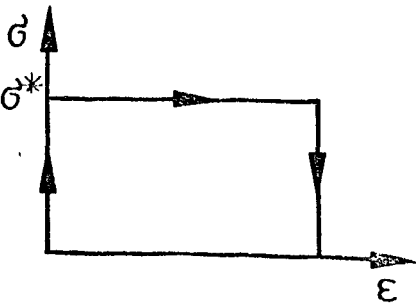
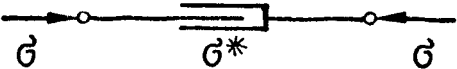


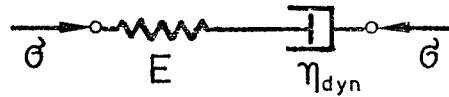
Bild 2-9 St.-Venant'scher Körper

Aus diesen 3 Grundkörpern lassen sich durch Kombinationen beliebig weitere Idealkörper erzeugen, von denen hier in aller Kürze nur die wichtigsten besprochen werden (s. Bild 2.10):

Modell :

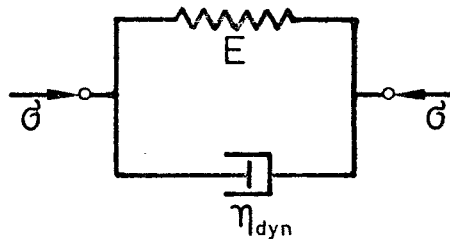
Stoffgleichung :

④ Maxwell-Körper :



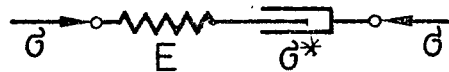
$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta_{\text{dyn}}}$$

⑤ Kelvin-Körper :
(Voigt-Modell)



$$\sigma = E \cdot \epsilon + \eta_{\text{dyn}} \cdot \dot{\epsilon}$$

⑥ Prandtl-Körper :

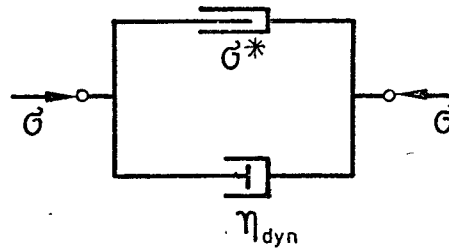


$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ für } \sigma < \sigma^*$$

$$\epsilon = ? \text{ für } \sigma = \sigma^*$$

$$\sigma > \sigma^* \text{ nicht zulässig}$$

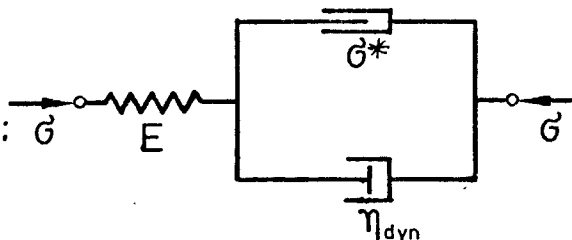
⑦ Bingham-Körper :



$$\text{für } \sigma < \sigma^* : \dot{\epsilon} = 0$$

$$\text{für } \sigma \geq \sigma^* : \dot{\epsilon} = \frac{\sigma - \sigma^*}{\eta_{\text{dyn}}}$$

⑦ a elastischer
Bingham-Körper :



$$\text{für } \sigma < \sigma^* : \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{für } \sigma \geq \sigma^* : \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - \sigma^*}{\eta_{\text{dyn}}}$$

Bild 2-10 Zusammengesetzte Idealkörper der Rheologie

Ein wichtiges Axiom der Rheologie besagt, daß alle realen Stoffe alle drei rheologischen Idealeigenschaften - nämlich Elastizität (Hooke'scher Körper), Viskosität (Newton'scher Dämpfer) und Plastizität (St.-Venant'scher Körper) - besitzen, wenn auch zu unterschiedlichen Anteilen. Damit hängen folgende grundsätzliche Unterscheidungen zusammen:

1. Feste Körper sind solche, bei denen das Verhalten durch hintereinander geschaltete Kelvin-Körper beschrieben werden kann. Befindet sich in dieser Kette außerdem noch ein Hooke'scher Körper, so stellt dieses Modell einen allgemeinen viskoelastischen festen Körper dar, dessen wichtigste Eigenschaft es ist, daß er sich nach Entlastung vollständig erholt, d. h. er weist zum Zeitpunkt $t = \infty$ nach Entlastung keinerlei irreversible Verformungen auf. Beim viskoelastischen festen Körper stellt sich unter konstant gehaltener Beanspruchung im Laufe der Zeit ein Ruhezustand ein. Irreversible Verformungen erhält man erst dann, wenn Feder und Dämpfer des Kelvin-Körpers altersabhängig und damit zeitabhängig sind.
2. Flüssige Körper sind solche, bei denen das Verhalten erklärbar ist aus der Verformung hintereinander geschalteter Idealkörper, von denen mindestens einer ein Newton'scher Dämpfer ist (bzw. Maxwell-Körper). Ein solches Modell stellt einen viskoelastisch-flüssigen Körper dar, bei dem sich unter konstant gehaltener Belastung im Laufe der Zeit ein stationärer Fließzustand einstellt.
3. Plastische Körper sind solche, bei denen sich im rheologischen Modell in der Kette ein St.-Venant'scher Körper (ideal plastisch) oder ein Bingham-Körper (viskoplastisch) befindet. Ein so zusammengesetztes Modell weist nach Entlastung immer irreversible, und zwar plastische, Dehnungen auf.

Aus den bisherigen Bemerkungen lassen sich weitere wichtige Aussagen ableiten. So ist z. B. ein beliebig aus Hooke'schen Federn und Newton'schen Dämpfern zusammengesetztes Modell immer linear, d. h. seine Dehnungsantwort auf eine Spannungsänderung ist zu jedem Zeitpunkt proportional der Größe der Spannungsänderung. Daraus wiederum ergibt sich die uneingeschränkte Gültigkeit des Superpositionsprinzips. Befindet sich aber in einem Modell an irgendeiner Stelle ein St.-Venant'scher Körper, so ist dieses Modell nichtlinear, denn zwischen Dehnungsantwort und Spannungsgröße herrscht kein linearer Zusammenhang mehr. Ein Vergleich der beiden von Pfefferle [31] verwendeten und in Bild 2-11 dargestellten rheologischen Modelle möge dies zeigen. Die Modelle entsprechen einander nicht, denn das links dargestellte Modell ist hochgradig nichtlinear, während das rechts dargestellte Modell nach wie vor linear ist, auch wenn es eine zeitlich nichtlineare Dämpfercharakteristik aufweist.

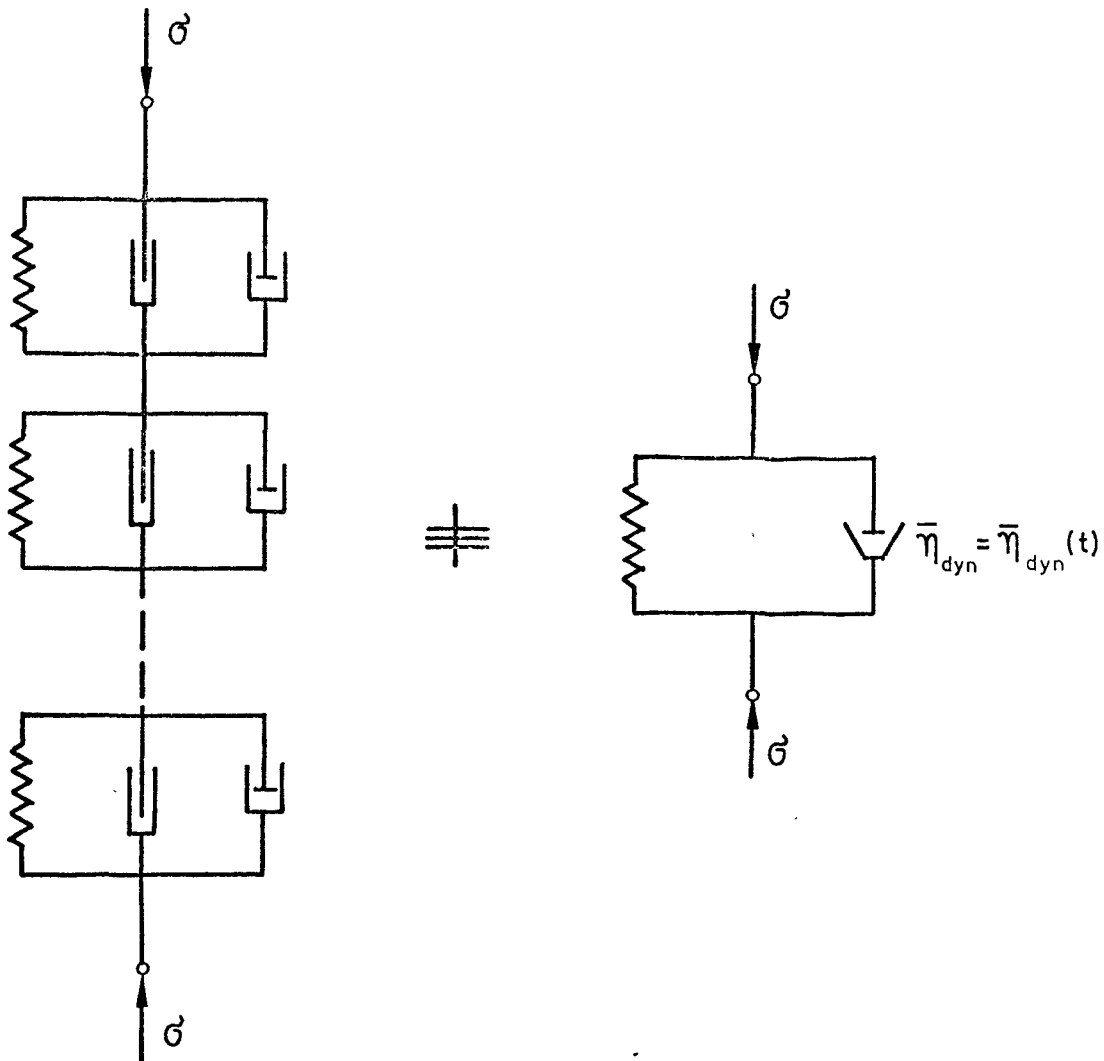


Bild 2-11 Nichtlineares und lineares Modell

Dies erkennt man sofort, wenn man die Differentialgleichungen beider Modelle aufstellt.

3. KRIECHVERHALTEN UNTER VERÄNDERLICHER BEANSPRUCHUNG

3.1. Theoretische Grundlagen (Lineares Kriechen)

Der in Bild 2-2 dargestellte Ablauf eines Kriechversuches mit konstanter Beanspruchung ab einem Zeitpunkt τ_0 kann mathematisch folgendermaßen formuliert werden:

$$\sigma = \sigma_0 H(t - \tau_0) \quad (3-1)$$

Hierin ist $H(t - \tau_0)$ die Einheitssprung- oder Heavisidefunktion (siehe z. B. Nowacki [35]):

$$H(t - \tau_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t - \tau_0 < \tau_0 \\ 1 & \text{für } \tau_0 < t - \tau_0 < +\infty \end{cases} \quad (3-2)$$

Die erste Ableitung der Heavisidefunktion ist die zur Bestimmung der Green'schen Funktionen (Einflußfunktionen) häufig verwendete Impuls- oder Dirac'sche Funktion:

$$\delta(t - \tau_0) = \frac{dH(t - \tau_0)}{dt} \quad (3-3)$$

Sie ist unter der Annahme, daß der Einheitssprung zum Zeitpunkt $\tau_0 = 0$ erfolgt, wie folgt definiert:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau \neq 0 \\ \infty & \text{für } \tau = \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

Außerdem hat die Dirac'sche Funktion im hier nur interessierenden positiven Zeithalbraum die folgende wichtige Eigenschaft:

$$\int_{0+}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (3-5)$$

Eine unmittelbare Anwendung der Gleichung (3-5) ergibt sich im Kriechversuch mit $\sigma_k = \text{konst.}$ Ist z. B. $\varphi(t, \tau)$ eine stetige Funktion im Intervall $(0, t)$, so folgt aus Glg. (3-5) im allgemeinen Fall

$$\frac{E}{\sigma_k} \varepsilon_k(t) = \int_{\tau_0}^t \delta(t - \tau_0) \cdot \varphi(t, \tau) d\tau = \varphi(t, \tau_0) \quad (3-6)$$

Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, daß der zeitliche Verlauf des Kriechens für den Einheitsspannungssprung identisch ist mit der Kriechfunktion.

Unter Ausklammerung der Schwinddehnungen ergibt sich aus Gl. (2-4) unter Berücksichtigung von Glg. (3-1) und (2-8) für $\sigma = \text{konst.}$:

$$\varepsilon_{\text{ges}}(t) = \varepsilon_{\text{el}} + \varepsilon_{\text{k}} = \frac{\sigma_0}{E} \cdot [1 + \varphi(t, \tau_0)] = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \Phi(t, \tau_0) \quad (3-7)$$

Abgesehen von der Tatsache, daß hierbei bereits der E-Modul als zeitlich unveränderlich angesetzt wird (siehe Abschnitt 5.1.1), soll die Bezeichnung $\varphi(t, \tau_0)$ andeuten, daß das Kriechen in noch näher zu analysierender Art und Weise sowohl von der absoluten Zeit t (Beobachtungszeitpunkt) als auch vom Zeitpunkt des Belastungsbeginns τ_0 abhängt. $\varphi(t, \tau_0)$ bezeichnet man als Kriechfunktion, während $\Phi(t, \tau_0)$ in Analogie zur Schwingungslehre als Übergangsfunktion für einen Einheitsspannungssprung zu interpretieren wäre (s. Magnus [38]).

In der Praxis kommt der Fall der zeitlich konstanten Beanspruchung so gut wie nicht vor. Für den häufiger vorkommenden Fall einer vorgegebenen Spannungsgeschichte $\sigma(t)$, wie in Bild 3-1 dargestellt, bedient sich die lineare Viskoelastizitätstheorie [1, 35, 36] der folgenden Integralbeziehung:

$$E \cdot \varepsilon_{\sigma}(t) = \int_0^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \Phi(t, \tau) d\tau \quad (\sigma(\tau_0=0)=0) \quad (3-8)$$

Glg. (3-8) ermöglicht die Ermittlung der Dehnungszeitfunktion als Antwort auf eine vorgegebene Spannungszeitfunktion.

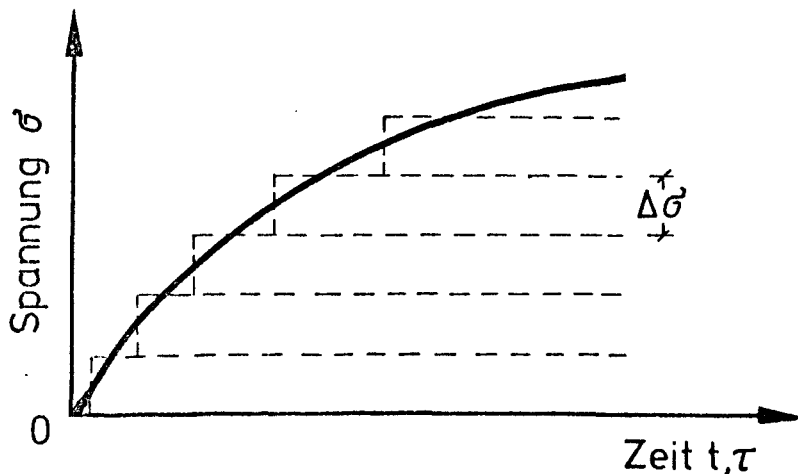


Bild 3-1 Beliebige Spannungsgeschichte als Folge von Sprungfunktionen

Die Allgemeingültigkeit von Glg. (3-8) wird nicht eingeschränkt, wenn man der Einfachheit halber annimmt, daß der Anfangswert $\sigma(\tau_0=0) = 0$ ist. Damit fällt der Anfangsterm weg, und die Formeln werden kürzer. Das Integral in Glg. (3-8) wird unterschiedlich bezeichnet: Stieltjes-Integral [39] bzw. allgemein "Vererbungsintegral (hereditary integral)" (s. Flügge [36]).

Unter Berücksichtigung von Glg. (3-6) ergibt sich für den Fall einer konstanten Beanspruchung

$$E \varepsilon_{\sigma=\text{konst.}} = \sigma_0 \Phi(t, \tau_0) \quad (3-9)$$

Die wichtigste Voraussetzung in Glg. (3-8) ist der lineare Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung (auch der Kriechdehnung). Hierbei muß deutlich festgehalten werden, daß die Linearität wegen der uneingeschränkt vorausgesetzten Gültigkeit von Glg. (3-8) vom Vorzeichen einer Spannungsänderung unabhängig ist. Auf die Bedeutung dieser Tatsache wird noch eingehend eingegangen werden.

Gemäß Onat [40] bedeutet Linearität, daß der Operator \mathcal{F} , der das mechanische Stoffverhalten darstellt, die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Homogenität: } \mathcal{F}(\lambda \sigma) = \lambda \mathcal{F}(\sigma) \\ \text{Assoziativität: } \mathcal{F}(\sigma_1 + \sigma_2) = \mathcal{F}(\sigma_1) + \mathcal{F}(\sigma_2) \\ \text{(Additivität)} \end{array} \right\} \quad (3-10)$$

Hierin sind λ eine Konstante und σ_1, σ_2 beliebige Spannungsgeschichten. Äußerst wichtig ist vor allem die 2. Forderung; sie besagt in Worten:

Die Dehnungsantwort eines Materials auf die Summe zweier Spannungsgeschichten ist gleich der Summe der Dehnungsantworten auf die einzelnen Spannungsgeschichten.

Dieses "Superpositionsprinzip" wurde wohl zum ersten Mal von Boltzmann [41] entwickelt und von McHenry [42] auf den Werkstoff "Beton" übertragen. In Bild 3-2 ist die anschauliche graphische Deutung des Superpositionsprinzips dargestellt. Zum Zeitpunkt τ_0 wird eine Probe mit der Spannung $+\sigma_1$ belastet. Die zugehörige Kriechdehnung ε_{k1} ist darunter dargestellt. Entlastet man nun zum Zeitpunkt τ_e völlig, so ergibt sich die Kriechdehnung für $t > \tau_e$ gemäß

Superpositionsprinzip, indem man von der über τ_e hinaus extrapolierten Dehnungskurve ϵ_{k1} die Kriechdehnungskurve ϵ_{k2} infolge eines Spannungssprunges $-\sigma$ zum Zeitpunkt τ_e subtrahiert. Die Kurve ϵ_{k2} würde man ebenso erhalten, hätte man zum Zeitpunkt τ_e mit einer Spannung $\sigma_2 = +\sigma$ belastet.

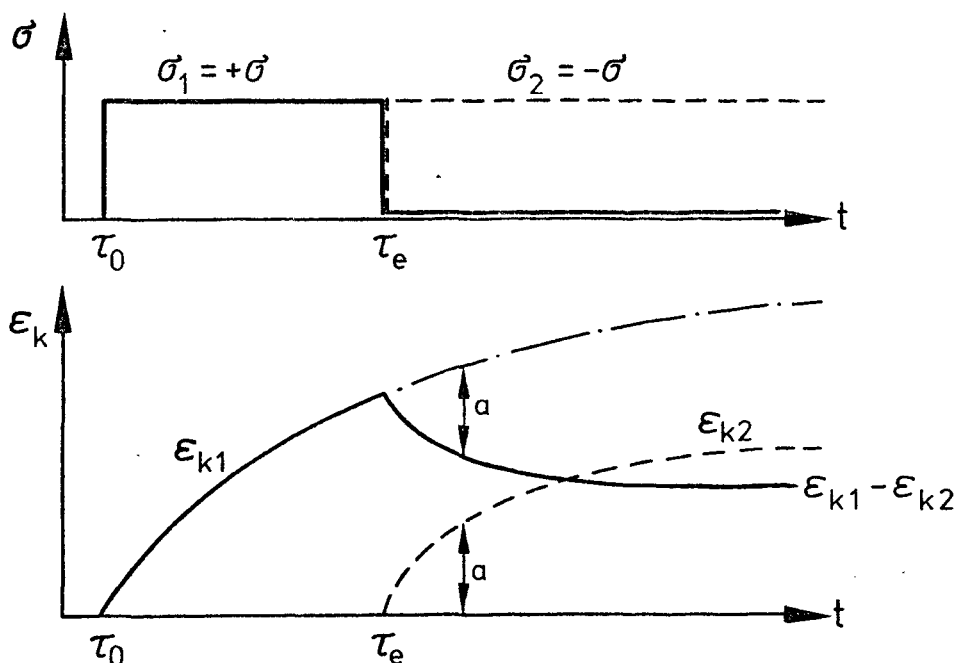


Bild 3-2 Kriechdehnung gemäß Superpositionsprinzip

Wenn man nun aus den in Abschnitt 2.2. geschilderten Gründen den elastischen Dehnungsanteil in Glg. (3-7) wegläßt, sieht man, daß allein die Kriechfunktion $\varphi(t, \tau)$ die Kriechdehnungen unter veränderlicher Spannung bestimmt.

3.1.1. Bestehende lineare Kriechtheorien (-funktionen)

Für den Ansatz der Kriechfunktion, auch gleichzeitig das "Kriechgesetz" (Haas [30]), sind in der Vergangenheit hauptsächlich vier Theorien zur Anwendung gekommen. Sie sollen an dieser Stelle in aller Kürze besprochen werden (siehe z. B. Argyris, Pister und Willam [43]). Sie werden in der Literatur wie folgt bezeichnet:

1. Fließen mit Alterung (F) (Aging flow method)

In der Literatur oft auch als Alterungstheorie bezeichnet,

2. Verzögert-elastisches Kriechen (V), (Delayed elasticity)

In der Literatur oft auch als Theorie der elastischen Nachwirkung bzw. Vererbungstheorie bezeichnet,

3. Affines Kriechen (P) (Aging delayed elastic model),

4. Summenansatz (S) (Summation model).

Im folgenden werden diese Theorien hinsichtlich ihrer stoffmechanischen Aussage analysiert.

Zu 1. "Fließen mit Alterung" (Aging flow method)

Dieser Ansatz wird in der Literatur auch Whitney'sches Fließen genannt. Die Methode faßt die sich unter frühestmöglicher Belastung ergebende Kriechkurve als "Whitney'sche-Idealkurve" auf. Gemäß der Beziehung (s. auch Bild 3 - 3a)

$$\varphi(t, \tau_i) = \varphi(t, 0) - \varphi(\tau_i, 0) \quad (3-11)$$

ergibt sich die Kriechfunktion für eine Spannung

$$\sigma_0 = \text{konst. für } \tau > \tau_i$$

in ihrer geometrischen Deutung als Parallelverschiebung normal zur Zeitachse.

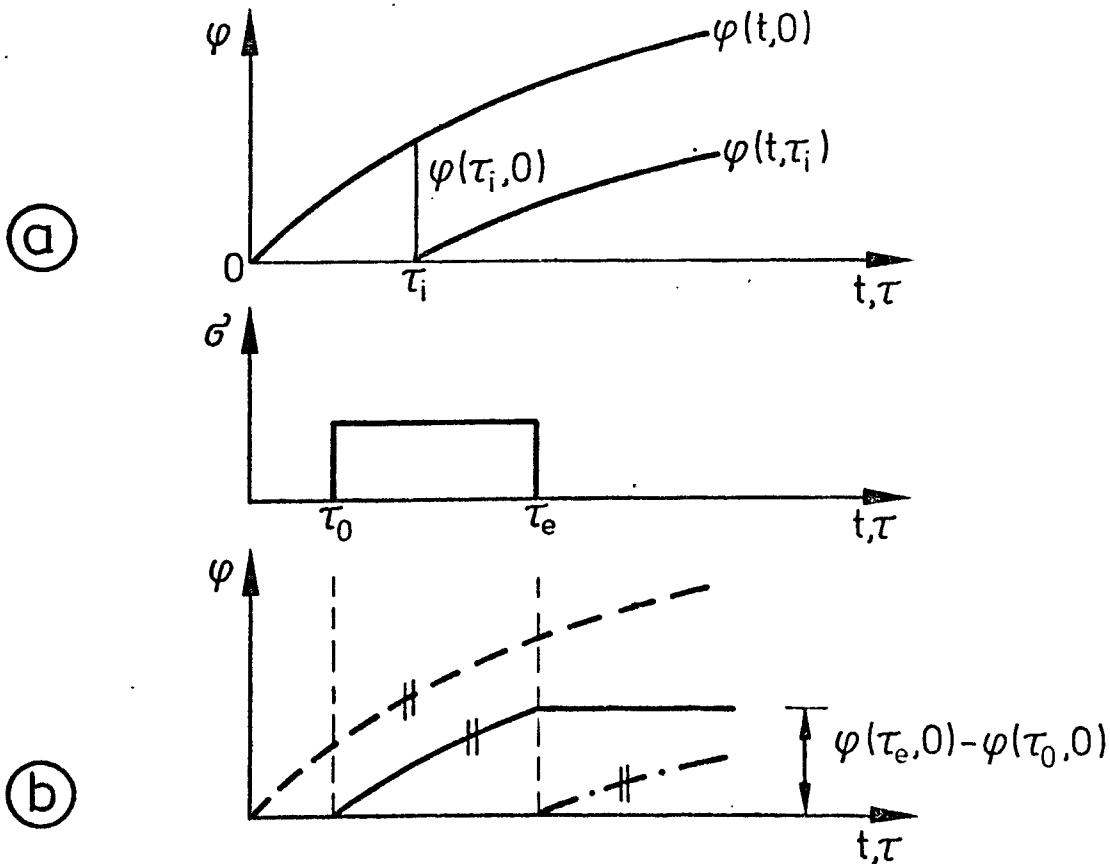


Bild 3-3 Fließen mit Alterung (F)

Die Alterung ergibt sich implizit durch die Bedingung 4 bzw. Glg. (2-33) in Abschnitt 2.4. In der osteuropäischen Literatur wird dieser Ansatz daher oft Alterungstheorie genannt (siehe auch [132]). Auf dem Ansatz (3-11) basieren auch die Ansätze von Dischinger [26], Ross [44] und England [45]. In der englischsprachigen Literatur wird er auch als "Rate of Creep"-Methode bezeichnet. Im folgenden soll dieser Ansatz mit F (Fließen) bezeichnet werden.

Die Kriechvoraussage dieser Theorie für den Einstufenversuch zeigt Bild 3-3b. Für den Zeitraum $\tau_0 < t < \tau_e$ beträgt das Kriechen analog Glg. (3-11):

$$\varphi(t, \tau_0) = \varphi(t, 0) - \varphi(\tau_0, 0) \quad (3-11a)$$

Nach vollständiger Entlastung wird die Kriechdehnung gleichsam "eingefroren". Es findet kein Rückkriechen statt. Für den Zeitraum $\tau_e < t$ ist also das Kriechen konstant:

$$\varphi(t, \tau_0) = \varphi(\tau_e, 0) - \varphi(\tau_0, 0) \quad (3-11b)$$

Zu 2. Verzögert-elastisches Kriechen (Delayed elastic model)

In diesem Ansatz wird gemäß der Theorie des linear-viskoelastischen Körpers mit konstanten Koeffizienten der Kriechanteil des Integralkerns von Glg. (3-8) nur in Abhängigkeit von der Belastungsdauer $(t-\tau)$ gesehen:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t - \tau) \quad (3-12)$$

bzw. $\phi(t, \tau) = \phi(t - \tau)$

In diesem Fall wird das Integral in Glg. (3-8) als Duhamel'sches Integral in Analogie zur Schwingungslehre [37, 38] bezeichnet.

Für $\varphi(t-\tau)$ sind z. B. die Ansätze von Glg. (2-10) oder (2-11) möglich. Glg. (2-12 und (2-16) sind jedoch ebenfalls möglich, wenn man Glg. (3-12) speziell auffaßt:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{\infty} \cdot k(t - \tau) \quad (3-12a)$$

mit

$\varphi_{\infty} = \text{konst.} = \text{Endkriechzahl}$

$$\lim_{(t-\tau) \rightarrow \infty} k(t-\tau) = 1$$

Dieser Ansatz kennt kein Altern des Materials. Im weiteren wird dieser Ansatz mit (V) bezeichnet. Die geometrische Deutung gibt Bild 3-4.

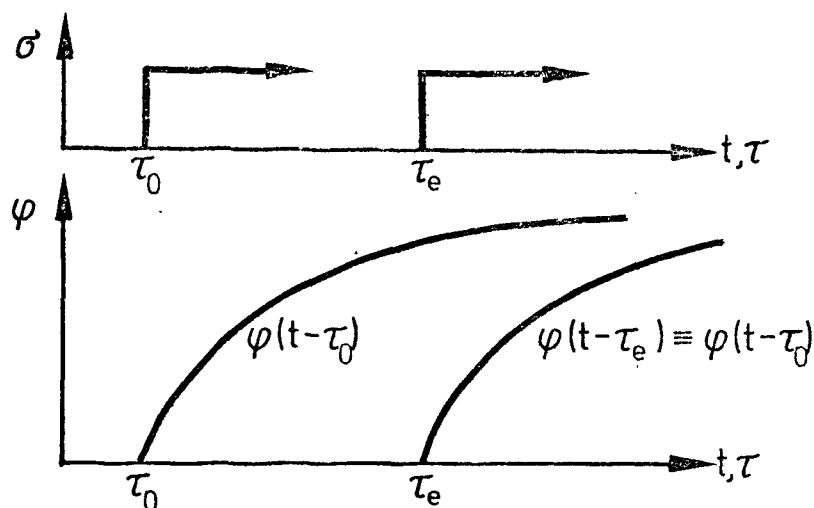


Bild 3-4 Verzögert-elastisches Kriechen (V)

Zu 3. Affines Kriechen (Aging delayed elastic model)

Arutyunyan [27] formulierte, ausgehend von der Theorie des verzögert-elastischen Kriechens, erstmals den folgenden Ansatz:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{\infty}(\tau) \cdot k(t - \tau) \quad (3-13)$$

Er nahm an, daß lediglich die Endkriechzahl φ_{∞} vom Betonalter abhängig ist, während der zeitliche Verlauf des Kriechens unabhängig ist vom Zeitpunkt der Erstbelastung. Damit kann die Kriechfunktion $\varphi(t, \tau)$ als Produkt zweier voneinander unabhängiger Funktionen dargestellt werden. Der Ansatz gemäß Glg. (3-13) wird deshalb in der Literatur auch häufig als Produktansatz (P) bezeichnet. Häufig wird auch die Bezeichnung "Affines Kriechen" (siehe z. B. [30]) verwendet, da die Kriechkurven für verschiedene Belastungszeitpunkte τ bei konstanter kriecheerzeugender Spannung zueinander affin verlaufen.

Der Produktansatz wurde aufgegriffen in DIN 1045 [33], den Empfehlungen der CEB-FIP [134] sowie im ACI-Committee 209 [46].

Die Kriechfunktion $\varphi(t, \tau)$ kann, wie in Bild 3-5 dargestellt, als Kriechfläche geometrisch gedeutet werden.

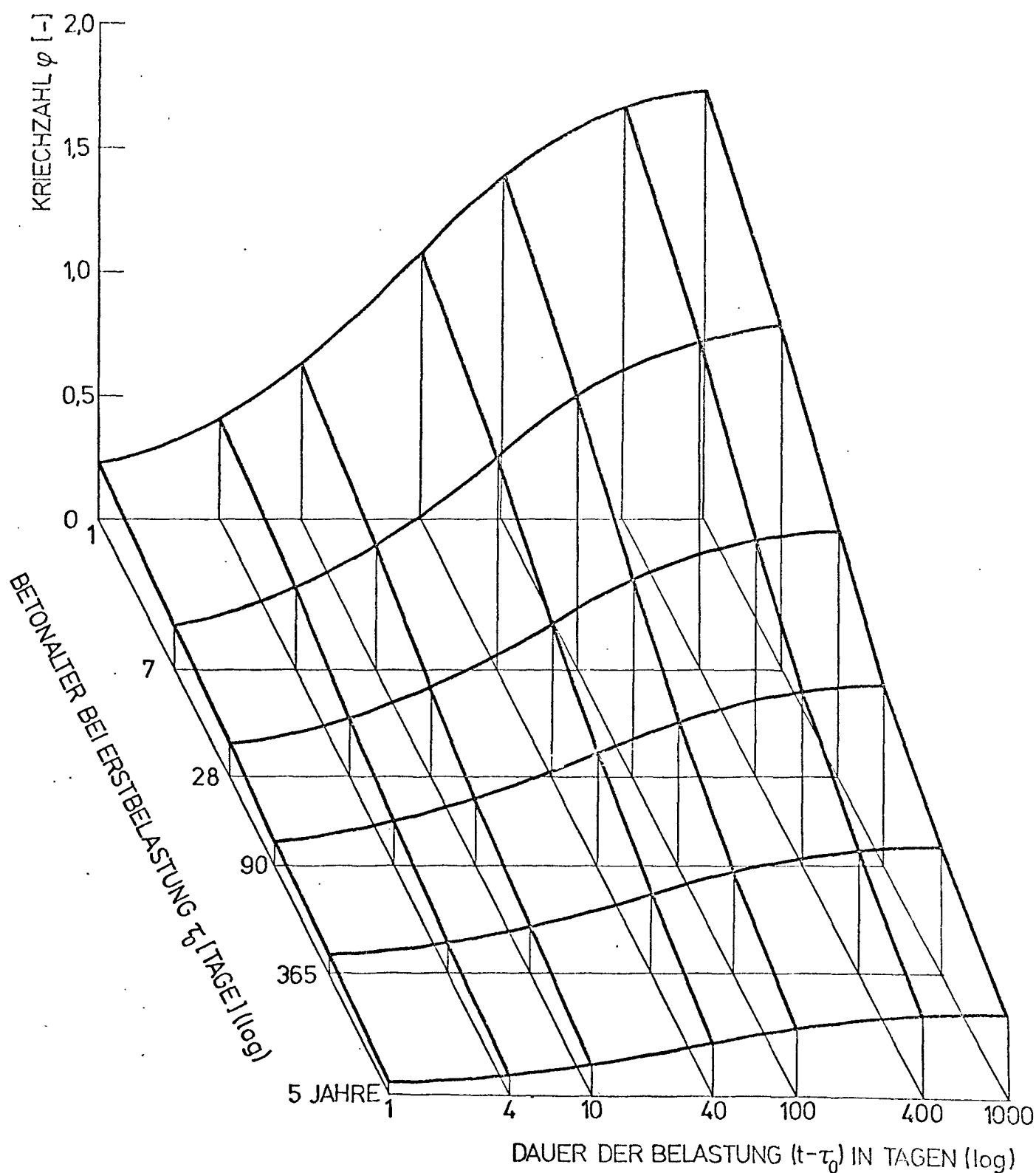
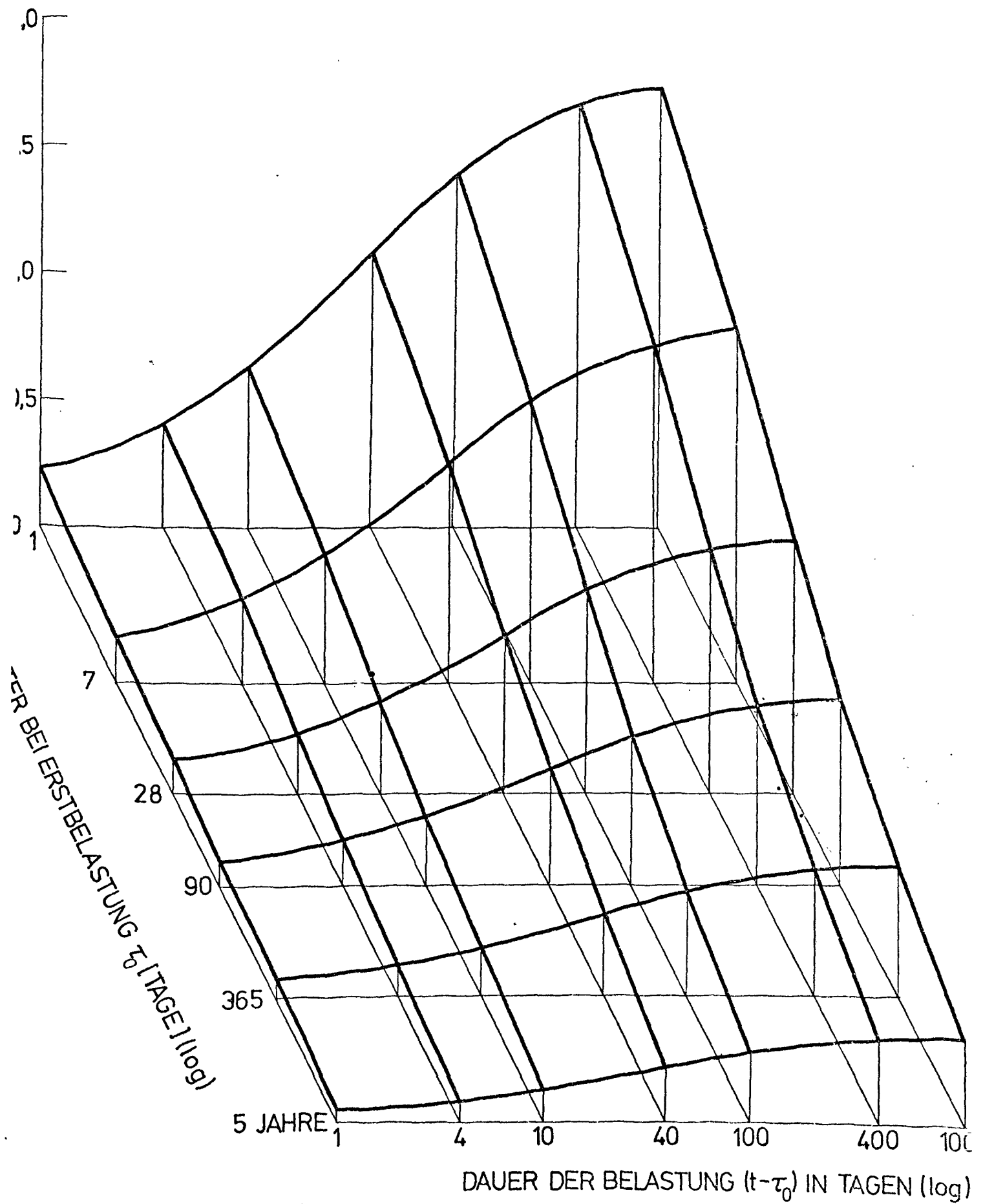


Bild 3-5 Kriechfläche beim affinen Kriechen bzw. Produktansatz (P).

Beispiel: DIN 1045 [33], $d_w = 5$ cm, $\varphi_0 = 1,0$, Alterungsverlauf für langsam erhärtenden Zement



Zu 4. Summenansatz (Summation Model)

Dieser in jüngster Zeit in den deutschen Spannbetonrichtlinien [47] wieder aufgegriffene Ansatz geht auf die Untersuchungen von Illston [13] zurück; gemäß Glg. (2-7) wird das Kriechen in einen reversiblen (verzögert-elastischen) und einen irreversiblen (Fließ-) Anteil aufgespalten, so daß die Kriechfunktion wie folgt definiert ist:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_f(t) - \varphi_f(\tau) + \varphi_v(t - \tau) \quad (3-14)$$

Die Kriechfunktion stellt also eine Summe von "Fließen mit Alterung" (Ansatz 1) und des verzögert-elastischen Kriechens (Ansatz 2) dar und wird daher häufig als Summenansatz (S) bezeichnet. Die Alterung des Betons wird lediglich im Fließanteil berücksichtigt. Außer in den Spannbetonrichtlinien [47] ist der Summenansatz von Rüschi, Jungwirth und Hilsdorf [4, 48] sowie vom CEB [49, 50, 51, 52, 53] aufgegriffen worden. In [47] bzw. [53] wird als Maximalwert für die altersunabhängige verzögerte Elastizität $\varphi_{v\infty} = 0,4$ angenommen.

In Analogie zum Produktansatz läßt sich auch für den Summenansatz die Kriechfläche gemäß Bild 3-7 konstruieren.

Einen Vergleich der Kriechfunktionen bzw. des Integralkerns von Glg. (3-8) untereinander sowie jeweils mit den phänomenologischen Erkenntnissen aus Abschnitt 2.2. ermöglicht am besten der Vergleich der jeweiligen Spannungs-Kriechdehnungsdiagramme (σ - ϵ_k -Diagramme). Hierbei wird wiederum der in Bild 2-2 dargestellte Einstufenversuch (Belastung $\sigma = \sigma_0 = \sigma_k$ und nachfolgende Vollentlastung) zugrunde gelegt. Der Vergleich ist in Bild 3-8 durchgeführt und wird im folgenden besprochen.

Ein Beton sei zum Zeitpunkt $t = \tau_0$ mit einer bestimmten Spannung σ belastet worden. Zum Zeitpunkt $t = \tau_e$ habe sich bei allen Kriechtheorien die gleiche Kriechdehnung $\epsilon_k(t)$ eingestellt. Zum Zeitpunkt $t = \tau_e$ erfolge die vollständige Entlastung.

Der Fließansatz (F), z. B. Dischinger, setzt alle Kriechverformungen als irreversibel an. Im Gegensatz zu der in [54] und [31] vertretenen Ansicht vermag die Theorie keine Rückverformungen bei Vollentlastung anzugeben, die über die elastische Rückverformung hinausgehen. Der Ansatz der verzögerten Elastizität

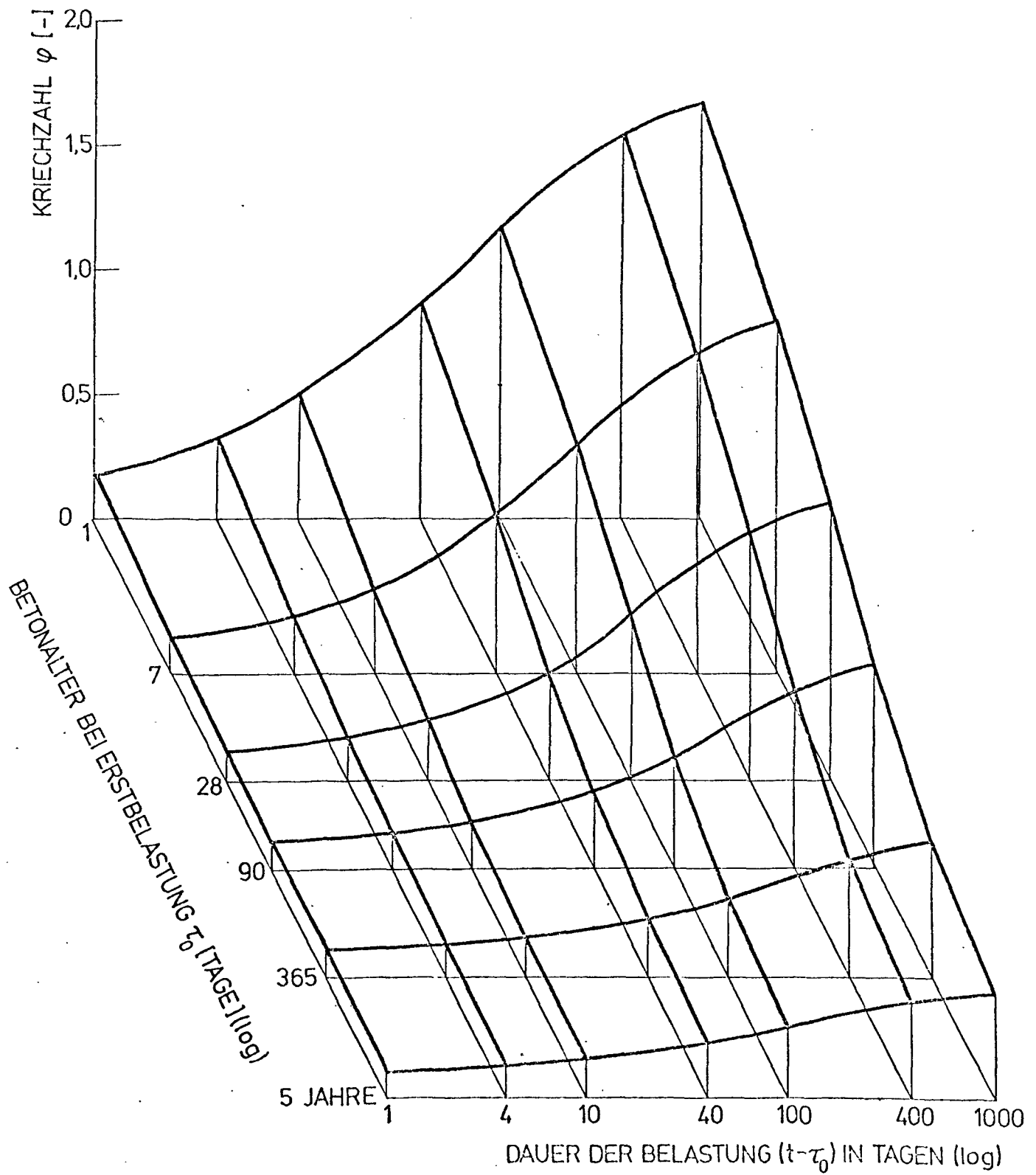
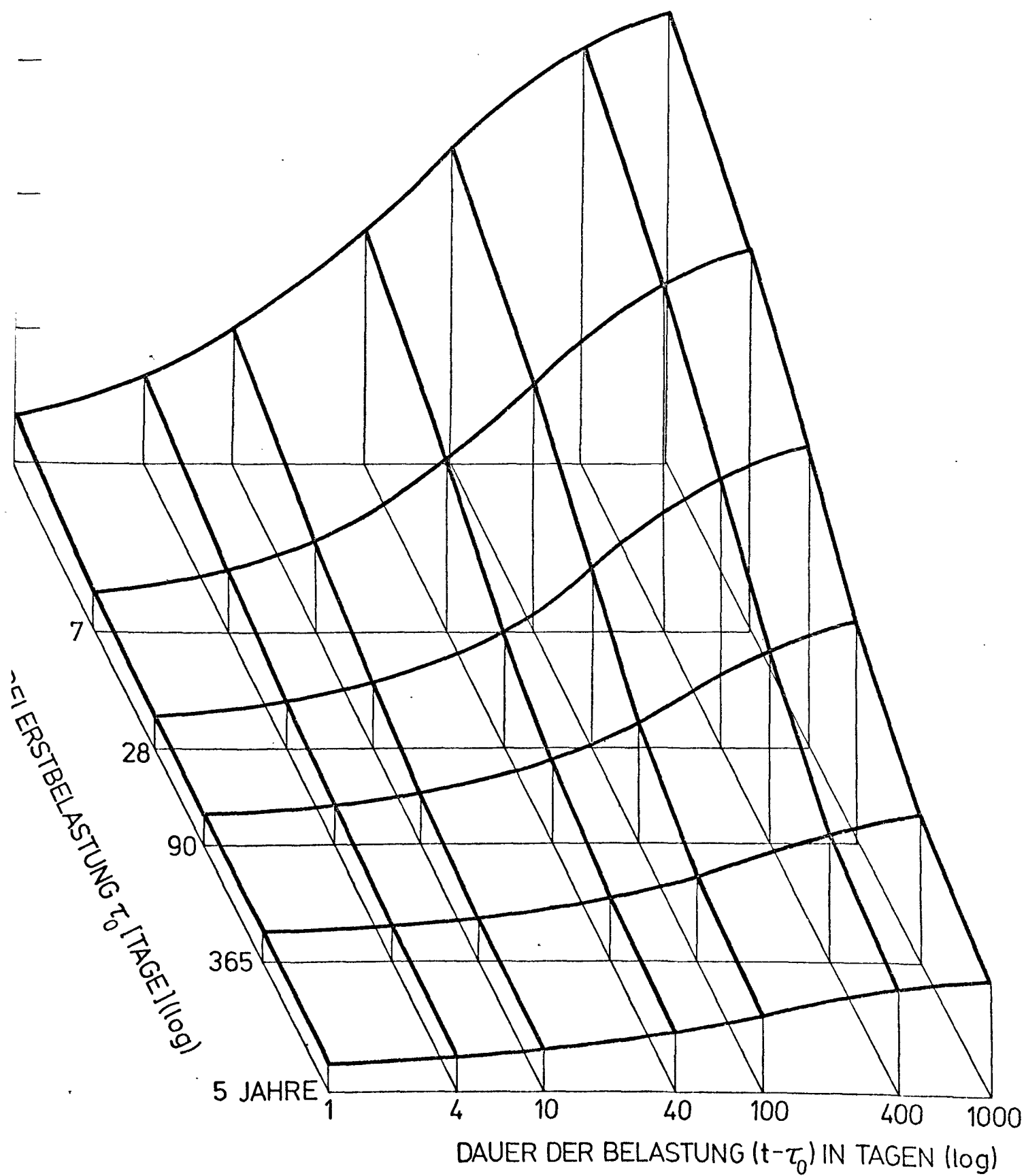


Bild 3-6 Kriechfläche für das reversible-irreversible Kriechen, Summenansatz (S)
 Beispiel: Spannbetonrichtlinien [47], $d_w = 5 \text{ cm}$, $\varphi_{fo} = 1,0$, langsam erhärtender Zement



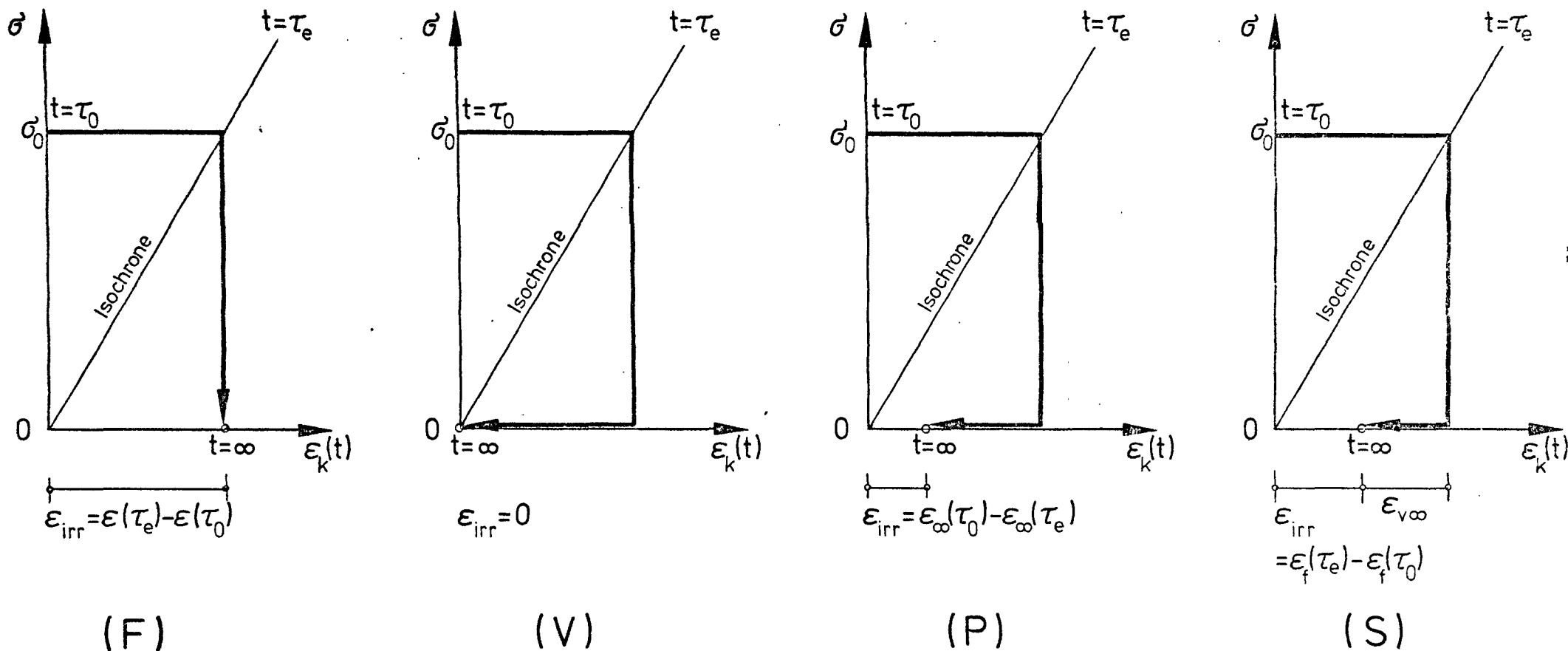


Bild 3-7 Vergleich der Kriechtheorien (F), (V), (P), (S) im Hinblick auf das Kriechdehnungsverhalten nach vollständiger Entlastung.

mit konstanten Koeffizienten (V) hingegen ergibt keine irreversiblen Verformungen. Auf diesen Mangel wird auch von Haas [30] und Schade [37] hingewiesen. Die Ansätze F und V stehen somit in gravierendem Widerspruch zu den Ergebnissen im Experiment, siehe Bild 2-2. Sie sollten daher als alleinige Ansätze für den Werkstoff Beton nicht mehr verwendet werden.

Der Produktansatz (P) vermag sowohl irreversible Verformungen als auch verzögert-elastische Rückverformungen anzugeben. Der Ansatz P steht dennoch in starkem Widerspruch zum Experiment. Wie in Abschnitt 3.3 noch ausführlich dargelegt werden wird, überschätzt er das Rückkriechen beträchtlich.

Der Summenansatz (S) weist eben diesen Nachteil nicht auf. Es mag sicherlich eine Streitfrage sein, ob die Aufspaltung der Kriechdehnung in einen verzögert-elastischen und einen Fließanteil thermodynamisch gerechtfertigt ist oder nicht (Bažant [135]), die Tatsache der Existenz von reversiblen und irreversiblen Kriechanteilen bei Beton wird von keinem Forscher angezweifelt, auch nicht von Bažant. Auf der anderen Seite ist der Produktansatz, bzw. das Kriechen überhaupt, bis heute noch nicht mit Hilfe der Gesetze der Thermodynamik allein entwickelt bzw. beschrieben worden. Darauf weisen auch Rüşch u. a. in ihrer Erwiderung auf [135] hin.

Eine nähere Analyse von Produktansatz P und Summenansatz S hinsichtlich ihrer Übereinstimmung mit dem Experiment wird in Abschnitt 3.3. durchgeführt. Festzustellen bleibt in jedem Falle, daß beide Ansätze das Verhalten unter Be- und Entlastung qualitativ richtig wiederzugeben vermögen. Bei der Interpretation des Produktansatzes bei Vorgabe einer Spannungsgeschichte gemäß Bild 3-8a muß man sich jedoch vor Fehlschlüssen, wie sie z.B. Franke [54] macht, hüten. Franke gibt als Kriechdehnungsantwort des Betons den Linienzug O A B C C" D" E in Bild 3-8b an und behauptet, daß es ein Widerspruch sei, daß Punkt C" gemäß Theorie rechts der ∞ -Isochronen (gleiches Zeitkriechverhalten) liegt, da doch infolge Alterung abgeminderte Kriechfähigkeit angenommen wurde. Hier muß jedoch bemerkt werden, daß für die Spannung σ_1 die Strecke AB' das maximal mögliche Kriechpotential darstellt, und nicht die Strecke A'C - vorausgesetzt, man geht von der Existenz einer Endkriechdehnung aus. Erfolgt zwischen $t = \tau_e'$ und $t = \tau_e''$ eine Teilentlastung und zum Zeitpunkt $t = \tau_e''$ eine erneute Belastung mit σ_1 , so wird das Kriechpotential AB' nicht mehr erreicht.

Dies rührt einzig und allein aus der Tatsache her, daß der Produktansatz irreversible Kriechdehnungen aus der Spannungsdifferenz $\sigma_2 - \sigma_1$ voraussagen vermag.

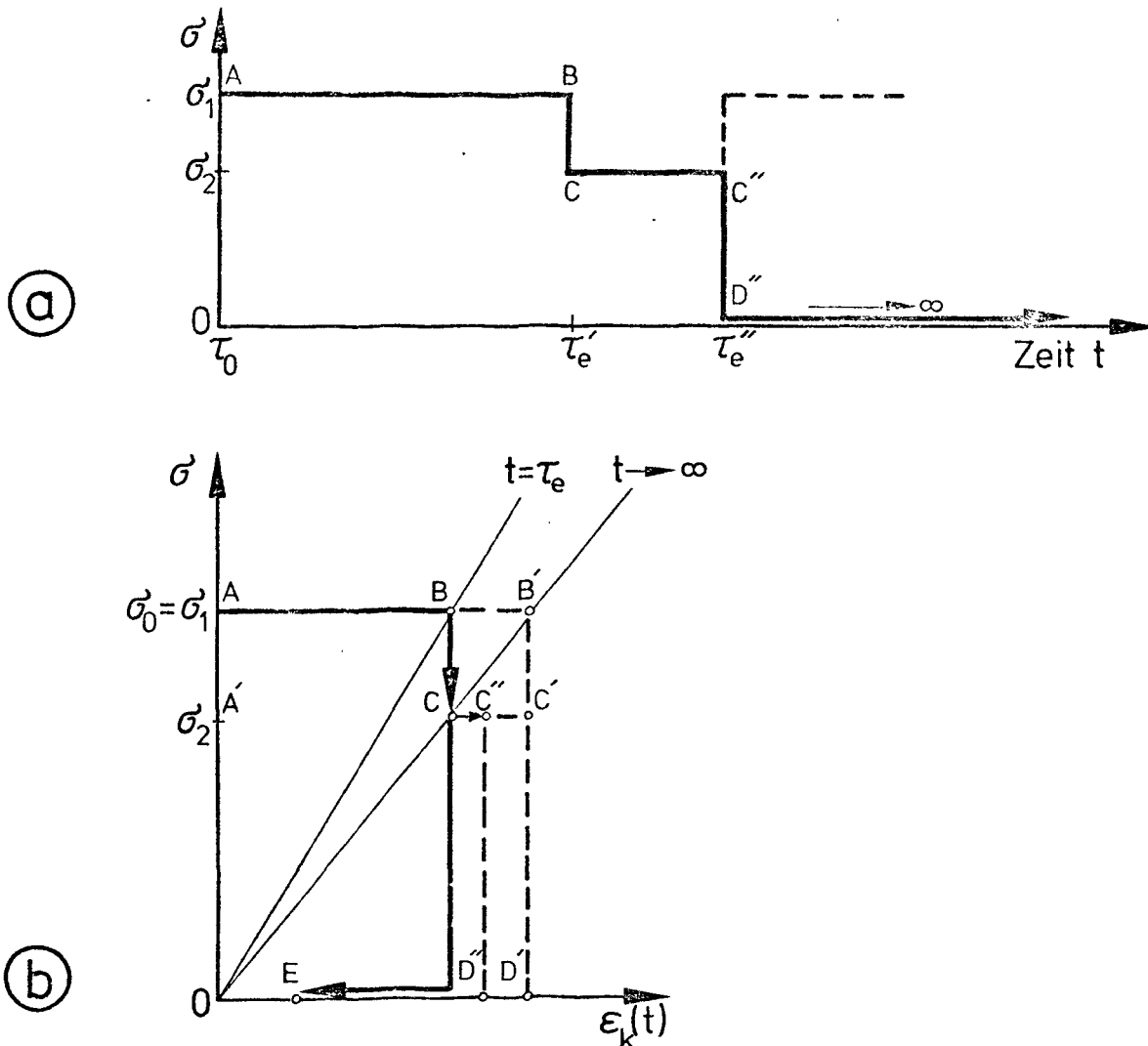


Bild 3-8 Kriechverhalten gemäß Produktansatz bei einer Spannungsgeschichte mit teilweiser Entlastung

3.1.2. Zur Anwendung von Integralbeziehungen

Wie in Abschnitt 3.1.1. festgestellt wurde, sollte die Theorie (V) als allgemeingültige Theorie für den Beton nicht verwendet werden. Gleichwohl bietet diese Theorie (lineare Viskoelastizitätstheorie) für andere Werkstoffe, ggf. auch für sehr alten Beton - dessen Kenngrößen dann zeitunabhängig werden - einige interessante mathematische Vorteile, auf die kurz eingegangen werden soll.

Ist nämlich in Glg. (3-8) unter Vernachlässigung der elastischen Anteile $\varphi(t, \tau)$ nur eine Funktion der Belastungsdauer $(t-\tau)$ (siehe Glg. (3-12)), so geht Glg. (3-8) über in

$$\epsilon_k(t) = \frac{1}{E} \int_0^t \varphi(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3-15)$$

Diese Gleichung läßt sich auch mit Hilfe von Integraloperatoren aus der Grundgleichung

$$\sigma(t) \cdot P(D) = \epsilon(t) \cdot Q(D) \quad (3-16)$$

$P(D), Q(D)$ - Differentialoperatoren

bzw.

$$\sigma(t) \left[a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right] = \epsilon(t) \left[b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right] \quad (3-17)$$

a_i, b_i - konstante (zeitunabhängige) Koeffizienten

herleiten, wie dies Ackermann und Beutner [1], Rabotnov [55] sowie Trost [28] durchgeführt haben.

In (3-15) stellt $\varphi(t-\tau)$ eine "Vererbungsfunction" dar, weswegen die darauf basierende Theorie auch als Theorie der elastischen Nachwirkung (Vererbung) bezeichnet wird. Wichtigstes Kennzeichen des Duhamel'schen Integrals (3-15) ist dessen Unabhängigkeit von der absoluten Kriechzeit, d. h. es ist translationsinvariant gegenüber einer Verschiebung des Zeitmaßstabes, da es keine Alterung kennt.

Im Fall der Relaxation stellt Glg. (3-15) - da die gesuchte Funktion im Integralkern auftritt, wie man bei Anwendung der partiellen Integration unschwer erkennt -

$$\epsilon_k(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(\tau) \varphi(t-\tau) \right] \Big|_0^t - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3-18)$$

eine Integralgleichung dar. Da Glg. (3-15) eine Integralgleichung erster Art vom Volterra'schen Typ bzw. eine Integralgleichung vom Faltungstypus darstellt, ergibt sich Glg. (3-18) auch durch Anwendung des Faltungssatzes auf Glg. (3-15). Auf Grund des Faltungssatzes wird Glg. (3-15) unter Anwendung

der Laplace-Transformation in eine lineare algebraische Gleichung umgeformt, aus deren Lösung man durch Umkehrung der Laplace-Transformation (Inverse) die Lösung der Integralgleichung erhält. Einige grundlegende Einführungen können bei Doetsch [57] nachgelesen werden. Eine Anwendung der Lösungsmethode gibt z. B. Kruppe [58].

Aus den Gleichungen (3-15) und (3-18) erkennt man außerdem eine unterschiedliche anschauliche Bedeutung. Während sich die Lösung von Glg. (3-15) bei einer beliebigen Spannungsfunktion als zeitabhängige Erregerfunktion (in Analogie zur Schwingungslehre [38]) durch eine Folge von Sprungfunktionen approximieren läßt (s. Bild 3-1), ergibt sie sich in Glg. (3-18) durch Approximation mittels einer Folge von Einzelimpulsen (siehe Bild 3-1a) bzw. Stoßfunktionen.

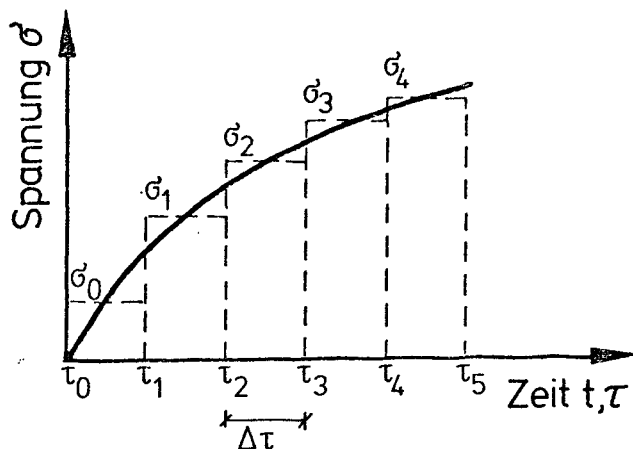


Bild 3-1a Beliebige Spannungsgeschichte als Folge von Einzelimpulsen

So erhält man eine Lösung als anschauliches Ergebnis der Anwendung des Superpositionsprinzips zu

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{\sigma(\tau_i + \frac{\Delta\tau}{2})}{E} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot d\tau \quad \text{mit } n = \frac{t}{\Delta\tau} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\sigma(\tau_i + \frac{\Delta\tau}{2})}{E} \cdot [\varphi(t-\tau_i) - \varphi(t-\tau_{i+1})] \\ t &\text{ - ganzzahliges Vielfaches von } \Delta\tau \end{aligned} \quad (3-19)$$

Für die Alterungstheorie (F) erhält man analog zu (3-19) die Gleichung

$$\epsilon_k(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\sigma(\tau_i + \frac{\Delta\tau}{2})}{E} [\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i+1})] \quad (3-20)$$

die einen erheblich geringeren Rechenaufwand bedeutet.

Eine weitere anschauliche Bedeutung der Theorie (V) erhält man, wenn man in Glg. (3-17) die Ordnung der Differentialbeziehung gegen unendlich streben läßt. Aus Glg. (3-18) ergibt sich dann unter Berücksichtigung des Übergangs vom Summenzeichen zum Integral in den Gleichungen (2-16) bzw. (2-18) und unter Vorgabe bestimmter Anfangsbedingungen:

$$\epsilon_k(t) = \frac{1}{E} \varphi_{k\infty} \cdot \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{K(\tau_k)}{\tau_k} \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_k}} d\tau_k \quad (3-21)$$

Hierin ist $K(\tau_k)$ ein kontinuierliches-normalisiertes Spektrum der Verzögerungszeiten mit der Bedingung

$$\int_0^\infty K(\tau_k) d\tau_k = 1 \quad (3-22)$$

Man erkennt, daß für verschiedene Gestalten der Funktion $K(\tau_k)$ auch verschiedene Kriechfunktionen erhalten werden, da die folgende Beziehung gilt:

$$\varphi(t-\tau) = \varphi_{k\infty} \cdot \int_0^\infty K(\tau_k) (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_k}}) d\tau_k \quad (3-23)$$

Daraus läßt sich folgern, daß man durch entsprechende Auswahl der Verteilungsfunktion $K(\tau_k)$ jede empirische Kriechkurve approximieren kann.

Man kann jedoch auch den umgekehrten Weg beschreiben und die empirische Kurve $\varphi(t-\tau)$ in Glg. (3-23) als Integralgleichung auffassen, aus der die Verteilungsfunktion $K(\tau_k)$ bestimmt werden kann. Hierbei treten jedoch erhebliche Schwierigkeiten bei der Ausführung der Laplace-Umkehrtransformation auf. Einen möglichen Weg, diese Schwierigkeiten zu umgehen, zeigt Pfefferle [31]. Dazu muß jedoch festgestellt werden, daß diese Methode auf einen bestimmten Kriechverlauf angewendet wurde, der experimentell unter einer konstanten Spannung gemessen wurde. Man hat also keine allgemeingültige Theorie gewonnen, die auch für veränderliche Spannung gilt. Für veränderliche Spannungen ist vielmehr grundsätzlich von der Integralbeziehung (3-8) auszugehen.

Verläßt man die Voraussetzung der Zeitunabhängigkeit der Koeffizienten der linearen Viskoelastizität, so erhält man als eine Möglichkeit den Produktansatz (P) des affinen Kriechens. Für ihn lautet die Integralbeziehung:

$$\epsilon_k(t) = \frac{1}{E} \cdot \int_{\tau_0}^t \varphi_\infty(\tau) k(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3-24)$$

Man erkennt sofort, daß die Auswertung des Integrals in Form einer geschlossenen Lösung für eine beliebige zeitabhängige Erregerfunktion (Spannungsgeschichte) nur dann möglich sein wird, wenn man z. B. von bestimmten Funktionen für die Alterung ($\varphi_{\infty}(\tau)$) ausgeht (siehe z. B. Abschnitt 3.4). Es bleibt jedoch immer die Möglichkeit, Glg. (3-24) gemäß Bild 3-1 bzw. analog Glg. (3-19) wiederum durch eine Folge von Sprungfunktionen zu approximieren:

$$\varepsilon_k(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta\sigma(\tau_i + \frac{\Delta\tau}{2})}{E} \cdot \varphi_{\infty}(\tau_i + \frac{\Delta\tau}{2}) \cdot k(t - \tau_i - \frac{\Delta\tau}{2}) \quad (3-25)$$

Dies ist natürlich auch bei Verwendung einer elektronischen Rechenanlage mit einem raschen Anwachsen der Datenbestände und einer komplexen Datenverwaltung verbunden, da in Glg. (3-25) für jedes t sämtliche vorangegangenen Spannungsintervalle jeweils mit neuen Werten berücksichtigt werden müssen. Dennoch hat die Auswertung der Glg. (3-25) auch erhebliche Vorteile, da sie die Möglichkeit der Verwendung von beliebigen zeitlichen Verläufen des Kriechens bzw. der Alterung bietet.

Erheblich größere Schwierigkeiten entstehen, wenn in Glg. (3-24) der Spannungsverlauf für eine vorgegebene Dehnungszeitfunktion (z. B. Relaxation, $\varepsilon_0 = \text{konst.}$) unbekannt ist. In diesem Fall stellt Glg. (3-24) eine Integralgleichung dar. Eine Laplace-Transformation darf hier nicht mehr ausgeführt werden, da die Koeffizienten a_i und b_i in Glg. (3-17) nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Belastungszeitpunktes τ sind. Hier führen nur noch Näherungsverfahren, z. B. das ρ -Verfahren von Trost [59] bzw. ein noch genaueres Verfahren von Haas [30] (siehe auch Abschnitt 3.1.3) zum Erfolg. Dieses Näherungsverfahren führt die Integralgleichung in eine algebraische Gleichung über, die numerisch leichter zu handhaben ist. Wie Schade [37] jedoch ausführt, kommt dabei der Frage der Fehlerabschätzung erhebliche Bedeutung zu.

3.1.3. Zur Anwendung von Differentialgleichungen

Während Integraldarstellungen für Kriechvorgänge vor allem dann sinnvoll sind, wenn der Spannungsverlauf quantitativ bekannt bzw. vorgegeben ist, ist die daraus ableitbare Differentialgleichung universeller verwendbar, da z. B. auch unbekannte Spannungsverläufe bei vorgegebener Dehnung berechnet werden können.

Der Ansatz von Dischinger (Fließtheorie F) lautet z. B. in differentieller Schreibweise gemäß Trost [59] (einschließlich des elastischen Dehnungsanteiles):

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{E} \dot{\varphi} \quad \text{mit } (\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial t} \quad (3-26)$$

Diese Differentialgleichung erfaßt, wie wir bereits gesehen haben, das zeitabhängige Verhalten des Betons nur sehr ungenau. Sie geht davon aus, daß die unter konstanter Spannung zum frühestmöglichen Erstbelastungszeitpunkt gemessene Kriechkurve auch die Kriechkurven für veränderliche Spannung liefert,

d. h. sie setzt

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_k &= \frac{\Delta \sigma}{E} \cdot (\varphi(t) - \varphi(\tau)) \\ \text{bzw. } d\epsilon_k &= \frac{\Delta \sigma}{E} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

Daraus muß man nicht unbedingt folgern, wie dies Schade [37] tut, daß Glg. (3-26) falsch sei, nur weil sie für veränderliche Spannung nicht das Duhamel'sche Integral in Glg. (3-8) benutzt, d. h. den Integralkern nur als Funktion der Belastungsdauer $(t-\tau)$ sieht. Man kann umgekehrt aus der Erkenntnis, daß die Viskoelastizitätstheorie (Duhamel'sches Integral) mit nichtkonstanten Koeffizienten (Produktansatz) das Kriechen eines alternden Betons besser zu beschreiben vermag als die Alterungstheorie, auch folgern, daß die experimentelle Basis, die zur Entwicklung der Alterungstheorie führt, noch nicht den heutigen Erkenntnissen entsprach.

Für die Viskoelastizitätstheorie mit konstanten Koeffizienten lautet die Differentialgleichung:

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau_k} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{E \cdot \tau_k} \cdot (1 + \varphi_\infty) \quad (3-28)$$

Hierin bedeuten:

$$\begin{aligned} \varphi_\infty &= \frac{E}{E_k} && \text{- Endkriechzahl} \\ \tau_k &= \frac{\eta_k}{E} \cdot \varphi_\infty && \text{- Retardationszeit des Kelvin-Elementes} \end{aligned}$$

Der Glg. (3-28) entspricht ein rheologisches Modell gemäß Bild 3-9. Außer Materialkonstanten tauchen in ihr sowohl die Spannung und Dehnung als auch deren

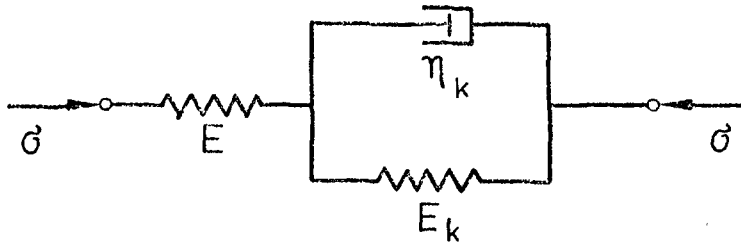


Bild 3-9 Rheologisches Modell für Viskoelastizitätstheorie mit zeitunabhängigen Koeffizienten (V)

zeitliche Ableitungen auf, während in Glg. (3-26) die Dehnung selbst nicht enthalten ist. Da ein einziges Kelvin-Element den zeitlichen Verlauf des Kriechens nur mangelhaft erfassen kann, werden im rheologischen Modell in der Literatur (siehe Abschnitt 3.2) meist mehrere Kelvin-Elemente in Reihe geschaltet. Man erhält dann ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung (n - Anzahl der Kelvin-Elemente), dessen Lösung keine besonderen Schwierigkeiten bereitet (siehe Trost [28]).

Will man die Differentialgleichung für das Affine Kriechen (Produktansatz P) herleiten, so kann man zur Vereinfachung wie in Glg. (3-28) lediglich ein Kelvin-Element betrachten und erhält dann gemäß Haas [30]:

$$\ddot{\epsilon} + \frac{1}{\tau_k} \dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{\tau_k} \dot{\sigma} (1 + \varphi_{\infty}(t)) + \ddot{\sigma} \right] \quad (3-29)$$

$\varphi_{\infty}(t)$ ist eine monoton abnehmende Alterungsfunktion, für die verschiedene Annäherungsmöglichkeiten existieren. In Anlehnung an DIN 1045 [33] hinsichtlich der Bezeichnungen kann $\varphi_{\infty}(\tau)$ wie folgt bestimmt werden:

$$\varphi_{\infty}(t) = \varphi_{\infty}(t = \tau = 28 \text{ d}) \cdot k(\tau) \quad (3-30)$$

Arutyunyan [27] setzte für $k(\tau)$ eine Hyperbelfunktion an:

$$k(\tau) = a + \frac{b}{\tau} \quad (3-31)$$

Sie wurde von Haas [30] erweitert zu:

$$k(\tau) = a + \frac{b}{\tau + c} \quad (3-31a)$$

Weitere mögliche Funktionen sind z. B.:

$$k(\tau) = a + b e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (3-32)$$

oder wie im ACI-Committee [46]:

$$k(\tau) = \gamma \cdot \tau^\delta \quad \text{mit } \delta < 1 \quad (3-33)$$

Durch Einsetzen von (3-31) in (3-29) erhält man:

$$\ddot{\epsilon} + \frac{\dot{\epsilon}}{\tau_k} = \frac{\ddot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{E \cdot \tau_k} \left[1 + \varphi_0 \left(a + \frac{b}{t} \right) \right] \quad (3-34)$$

Die Zeitzählung liegt durch die Zeitzählung in (3-31) fest. Die Dgl. (3-34) ist universell verwendbar für Vorgabe einer Spannungsgeschichte sowie für Vorgabe einer Dehnungsgeschichte, während die Integralgleichung (3-24) sinnvoll nur bei vorgegebener Spannungsgeschichte angewendet wird.

Im folgenden soll im Vorgriff auf Abschnitt 6. der Fall der Relaxation (vorgegebene Dehnungsgeschichte $\epsilon(t) = \text{konst.}$) als Beispiel für die Anwendung der Dgl. (3-34) behandelt werden (s. Bild 3-10).

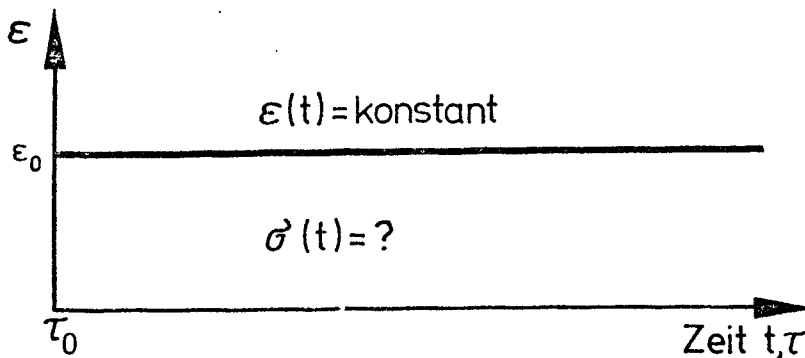


Bild 3-10 Relaxationsfall $\epsilon(t) = \text{konst.}$

Im gesamten Zeitbereich gilt:

$$\ddot{\epsilon} = \dot{\epsilon} = 0 \quad \text{mit } (\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial(t)} \quad (3-35)$$

Damit ergibt sich folgende homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{\sigma}(t) + \dot{\sigma}(t) \cdot \frac{1}{\tau_k} \left[1 + \varphi_0 \left(a + \frac{b}{t} \right) \right] = 0 \quad (3-36)$$

Sie wird durch Substitution:

$$y = \dot{\sigma}; \dot{y} = \ddot{\sigma} \quad (3-37)$$

umgeformt in die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau_k} y \left[1 + \varphi_0 \left(a + \frac{b}{t} \right) \right] = 0 \quad (3-38)$$

Über die Zwischenrechnungen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau_k} \cdot y \cdot \left[1 + \varphi_0 \left(a + \frac{b}{t}\right)\right]$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{\tau_k} \cdot \left[1 + \varphi_0 \left(a + \frac{b}{t}\right)\right] dt$$

$$\ln|y| = \int \left(-\frac{1}{\tau_k} - \frac{\varphi_0 \cdot a}{\tau_k} - \frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k \cdot t}\right) dt + C$$

$$\ln|y| = \frac{t}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a) - \frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k} \cdot \ln t + C_1$$

$$y = e^{\frac{t}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a) - \frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k} \cdot \ln t + C_1}$$

$$y = e^{C_1} \cdot \frac{e^{\frac{t}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a)}}{t^{\frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k}}}$$

erhält man:

$$\sigma(t) = C_2 \int_{\tau_0}^t \frac{e^{\frac{t}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a)}}{t^{\frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k}}} dt + C_3 \quad (3-39)$$

In Glg. (3-39) läßt sich das Integral nur durch eine Reihe darstellen, die unter der Voraussetzung, daß der Exponent im Nenner des Integranden nicht ganzzahlig ist, folgendes Aussehen hat:

$$\sigma(t) = C_2 \left\{ \int_{\tau_0}^t \frac{1}{t^{\frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{t}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a)\right]^n}{n!} \right) dt \right\} + C_3 \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} &= C_2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a)\right]^n}{n!} \int_{\tau_0}^t t^{n - \frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k}} dt \right\} + C_3 \\ &= C_2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{\tau_k} \cdot (-1 - \varphi_0 \cdot a)\right]^n}{n!} \cdot \frac{1}{n - \frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k} + 1} \cdot t^{n - \frac{\varphi_0 \cdot b}{\tau_k} + 1} \right\} \bigg|_{\tau_0}^t + C_4 \end{aligned} \quad (3-41)$$

Aus der Bedingung, daß $\sigma(t)$ für $t = \tau_0$ gleich der Anfangsspannung σ_0 ist, folgt

$$C_4 = \sigma_0 \quad (3-42)$$

Die Konstante C_2 ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Relaxationsgeschwindigkeit $\dot{\sigma}$ für die Dgl. (3-34) die gleiche sein muß wie für die Dgl. (3-28) für die Theorie der Viskoelastizität mit konstanten Koeffizienten, da die Alterungsfunktion sich zu Beginn der Relaxation nicht auswirkt. Dies soll an dieser Stelle jedoch nicht mehr durchgeführt werden. Je nach der gewünschten Genauigkeit kann n in Glg. (3-41) vorgegeben werden. Ähnlicher Aufwand tritt ebenfalls bei Ansatz einer Alterungsfunktion gemäß Glg. (3-32) oder (3-33) auf.

Für die Lösung der Differentialgleichung (3-34) der Theorie des Affinen Kriechens (Produktansatz (P)) entwickelte Trost [59] als Näherungsverfahren das sog. " ρ -Verfahren", indem er das Spannungs-Dehnungs-Verhalten durch eine algebraische Gleichung beschrieb. Der Relaxationskennwert ρ in der Gleichung

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 + \varphi(t)) + \frac{\sigma(t) - \sigma_0}{E} (1 + \rho \varphi(t)) \quad (3-43)$$

schwankt zwischen 0,5 und 1,0. Schade [37] erhebt Bedenken gegen die Fehlerabschätzung von Trost. Haas [30] weist darauf hin, daß die Ableitung der ρ -Formel von Trost nicht vollständig ist und führt zur Behandlung von Relaxationsproblemen die Dgl. 2. Ordnung (3-34) auf eine Dgl. erster Ordnung zurück und wertet das dann noch auftretende Integral $\int \sigma(\tau) \frac{\partial \varphi_0(\tau)}{\partial \tau} d\tau$ numerisch aus, indem er die Alterungsfunktion durch eine Stufenfunktion annähert.

Der Aufwand für die unmittelbare Anwendung der Dgl. (3-34) wächst noch beträchtlich an, wenn für den zeitlichen Verlauf des Kriechens statt von einem einzelnen von vier in Reihe geschalteten Kelvin-Elementen ausgegangen wird, oder wenn der Fall der Schwingrelaxation gemäß Bild 3-11 behandelt wird, für den die Differentialgleichung

$$\ddot{\sigma} = \dot{\sigma} \frac{1}{\tau_k} [1 + \varphi_0(a + \frac{b}{t})] = \pm m \cdot t + c \quad (3-44)$$

nur abschnittsweise gilt. Die Unstetigkeiten an den Knickpunkten der vorgegebenen Dehnungsgeschichte sind hier getrennt zu erfassen.

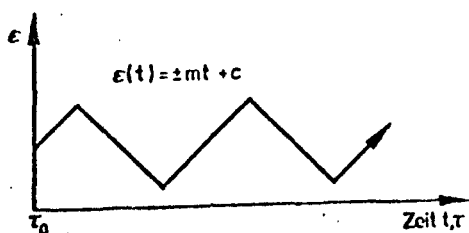


Bild 3-11 Beispiel einer Dehnungsgeschichte für den Fall der Schwingrelaxation

3.2. Rheologische Modelle der bestehenden Kriechtheorien

Wenn man für die in Abschnitt 3.1.1. dargestellten Kriechtheorien ein rheologisches Modell sucht, das aus den Idealkörpern des Abschnittes 2.5 zusammengesetzt ist, so genügt es, die Theorien für Summenansatz und Produktansatz zu betrachten, da der Summenansatz bereits die Fließtheorie und die Theorie der Viskoelastizität mit konstanten Koeffizienten (V) enthält. Die Theorie (V) stellt außerdem einen Sonderfall des Produktansatzes dar.

Der Summenansatz (S) läßt sich prinzipiell durch ein Modell gemäß Bild 3-12 darstellen. Dieses Modell besteht aus einem Maxwell-Körper und einem dazu in Reihe geschalteten Kelvin-Körper (Burgers-Modell). Der Maxwell-Körper für sich stellt das rheologische Modell für die Alterungs- bzw. Fließtheorie dar.

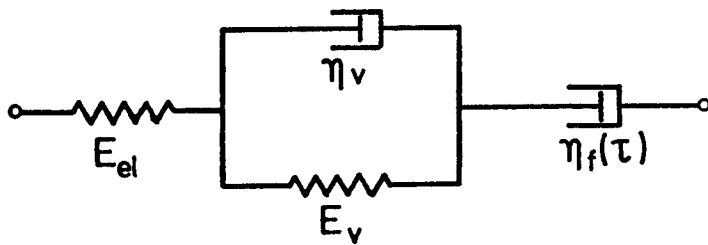


Bild 3-12 Rheologisches Modell für den Summenansatz gemäß Haas [30]

Im Gegensatz zum Burgers-Modell ist jedoch die Dämpferkenngröße η_f keine Konstante, sondern eine Funktion des Betonalters. Das rheologische Modell für die Theorie der elastischen Nachwirkung (V) erhält man, wenn man den Dämpfer des Maxwell-Körpers im Bild 3-12 wegläßt. E_{el} , E_v und η_v sind wegen der Translationsinvarianz der Dehnung alters- und somit zeitunabhängig.

Nimmt man als Ausgangsbasis für das Fließverhalten des Betons die Spannbetonrichtlinien [47] bzw. CEB [50] und approximiert die dort angegebenen Fließkurven durch Glg. (2-18), so ergibt sich die Viskosität des Maxwell-Körpers zu

$$\eta_f = \frac{E_{el}}{\dot{\varphi}_{fo}} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\tau_{ki}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{ki}}}} = \frac{E_{el}}{\dot{\varphi}_f(t)} \quad (3-45)$$

Im rheologischen Modell gemäß Bild 3-12 (Summenansatz) wird also der Beton als ein Stoff betrachtet, der sowohl das Verhalten eines viskoelastischen Festkörpers (Feder + Kelvin-Körper) als auch eines Fluids (Dämpfer des Maxwell-Körpers) aufweist. Stoffmechanisch betrachtet also der Summenansatz den Beton als eine Flüssigkeit mit verzögerter und unverzögerter Elastizität und linearem Verhalten. Da sich auch die verzögerte Elastizität nach allgemeiner Auffassung rasch einstellt (siehe auch [47]), wird der Beton für $\sigma = \text{konst.}$ nach Erreichen des Ruhezustandes hinsichtlich der verzögerten Elastizität nur noch als Flüssigkeit betrachtet, für die das Fließgesetz lautet:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta_f(\tau)} \quad (3-46)$$

Da η_f eine nichtlineare Funktion der Zeit ist, beschreibt Glg. (3-46) das irreversible Kriechen des Betons als einen von bleibenden Strukturänderungen begleiteten Verformungsvorgang, wie er auch bei Kunststoffen zu beobachten ist (siehe Hieke [101]).

Dieser Prozeß ist daher instationär. Für $t \rightarrow \infty$ liefert diese Betrachtungsweise stoffmechanisch gesehen einen gewissen Widerspruch. Nach allgemeiner Anschauung beschreibt ein rheologisches Modell, das einen in Reihe geschalteten Dämpfer enthält, einen Fließvorgang, der bei der Beschreibung des Sekundärkriechens in einen stationären Fließzustand übergeht, für den $\dot{\epsilon} = \text{konst.} \neq 0$ ist. Die Spannbetonrichtlinien [47] hingegen sagen für $t \rightarrow \infty$ einen Ruhezustand voraus, der an sich das Kennzeichen eines Festkörpers ist und somit nur durch einen Kelvin-Körper beschrieben werden kann. Stoffmechanisch bedeutet dieser Widerspruch die Diskussion über die Existenz eines Kriechendwertes für $\sigma = \text{konst.}$ Da diese Diskussion bis heute noch nicht abgeschlossen ist, soll sie an dieser Stelle nicht aufgegriffen werden.

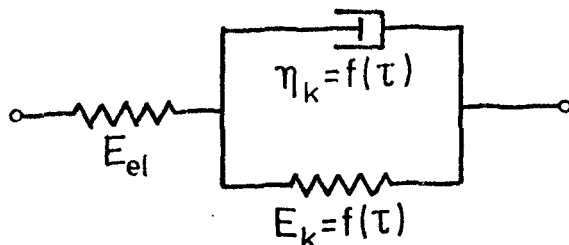


Bild 3-13 Rheologisches Modell für den Produktansatz

Das rheologische Modell für den Produktansatz (P) des affinen Kriechens ist in Bild 3-13 dargestellt. Ein wichtiger Unterschied zum rheologischen Modell der alterungsunabhängigen Viskoelastizität besteht dabei darin, daß die Viskosität des Kelvin-Dämpfers eine Funktion des Betonalters ist. Das hat zur Folge, daß E_k ebenfalls keine Konstante, sondern abhängig von der Alterungsfunktion und deren zeitlicher Ableitung ist. Prinzipiell betrachtet also das Affine Kriechen den Beton als viskoelastischen Festkörper, dessen Eigenschaften altersabhängig sind, wie es auch bereits aus der Ordnung der Differentialgleichung (3-29) abzulesen ist.

Aus der phänomenologischen Erkenntnis, daß das Kriechen des Betons von seinem Alter abhängt, läßt sich daher folgern, daß er von den Theorien (F) und (V) allein nicht beschrieben werden kann.

3.3. Kritik an den bestehenden Kriechtheorien

Bereits in Abschnitt 3.1.2. und 3.2. wurde dargelegt, daß die Alterungs- oder Fließtheorie (F) sowie die Theorie der elastischen Nachwirkung (V) nicht mehr verwendet werden sollten. Doch auch der Produktansatz (P) bzw. das "Affine Kriechen", wie es treffender bezeichnet wird, weist gravierende Mängel hinsichtlich der Voraussage stoffkundlichen Verhaltens auf, auf die im folgenden eingegangen werden soll. Obwohl der Produktansatz durch die Alterungsfunktion in der Lage ist, ein irreversibles Kriechen nach Entlastung vorauszusagen, liegt gerade in der Voraussage der Dehnungen nach Entlastung seine Schwäche. Zur Veranschaulichung sei in Bild 3-14 nochmals das vom Produktansatz vorausgesagte Dehnungsverhalten nach Entlastung dargestellt. Der Produktansatz beschreibt also das Kriechverhalten des Betons nach Entlastung mit Hilfe zweier jungfräulicher Kriechkurven, die mit einem Belastungsalter τ_0 bzw. τ_e experimentell bestimmt wurden bzw. gemäß Theorie bekannt sind:

$$t > \tau_e : \epsilon_{ke}(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot [\varphi_{\infty}(\tau_0) \cdot k(t - \tau_0) - \varphi_{\infty}(\tau_e) \cdot k(t - \tau_e)] \quad (3-47)$$

Grundvoraussetzung für jede Kriechtheorie muß nun aber sein, daß sie für ϵ_{ke} gemäß Glg. (3-47) für alle Werte von t sinnvolle und vom Experiment möglichst wenig abweichende Werte liefert.

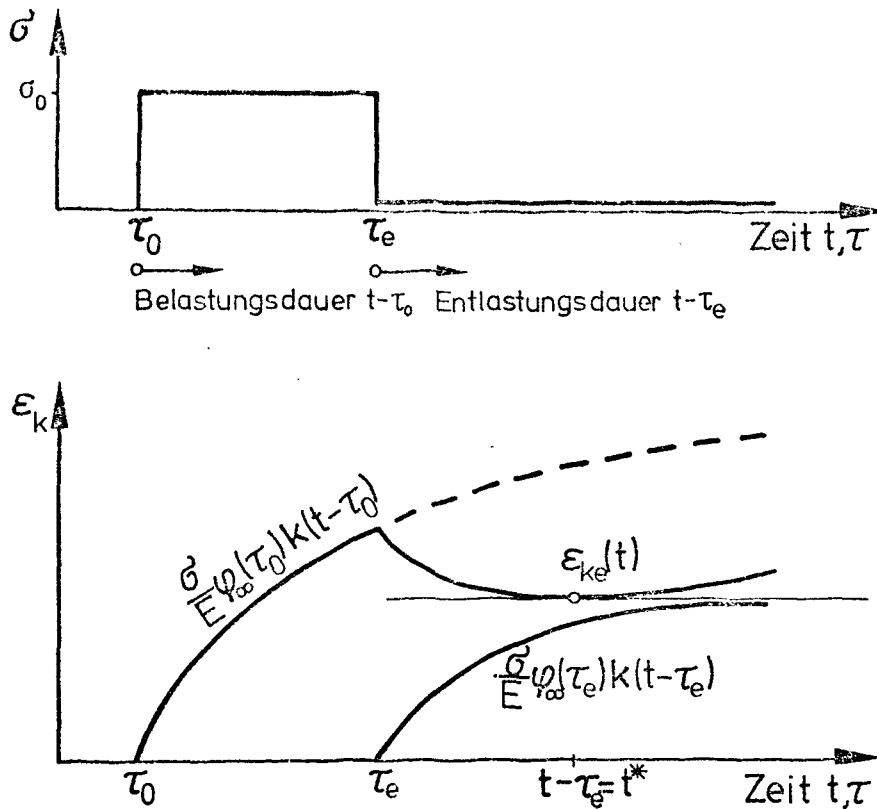


Bild 3-14 Kriechdehnung nach Entlastung im Einstufenversuch gemäß Produktansatz. Theorie des affinen Kriechens

Aus dem im Versuch beobachteten Verhalten des Betons nach Entlastung können wir als wichtige Forderungen an eine Kriechtheorie ableiten:

1. Die Kriechdehnung unmittelbar vor einer Vollentlastung kann danach nicht mehr übertroffen werden.
2. Der zeitliche Verlauf der Kriechdehnung nach Vollentlastung ist für alle Zeitpunkte $t > \tau_e$ monoton abnehmend.
3. Das Kriechverhalten nach Entlastung kann durch Superposition zweier Kriechkurven, die jeweils an jungfräulichen Proben ermittelt wurden, nicht beschrieben werden, da die irreversiblen Dehnungen nach Entlastung quantitativ unterschätzt werden.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Produktansatz diese drei Forderungen verletzt. Die Berechtigung der drei Forderungen wird mit einigen ausgewählten Versuchsergebnissen belegt.

Forderung 1. bedeutet mit den Bezeichnungen der DIN 1045 [33], daß im Einstufenversuch das Kriechen zum Zeitpunkt $t = \infty$ nach Entlastung nicht größer als das Kriechen zum Zeitpunkt der Entlastung sein darf:

$$k_1(\tau_0) \cdot \varphi_0 \cdot k_2(\tau_e - \tau_0) \geq k_1(\tau_0) \cdot \varphi_0 \cdot k_2(t - \tau_0 \rightarrow \infty) - k_1(\tau_e) \cdot \varphi_0 \cdot k_2(t - \tau_e \rightarrow \infty)$$

bzw.

$$k_2(\tau_e - \tau_0) \geq \frac{k_1(\tau_0) - k_1(\tau_e)}{k_1(\tau_0)} \quad (3-48)$$

Diesem nach Glg. (3-48) ermittelten Wert $k_2(\tau_e - \tau_0)$ kann man nun dem zum Zeitpunkt der Entlastung erreichten k_2 -Wert gegenüberstellen, wie es in Bild 3-15 durchgeführt worden ist. Für die verschiedenen wirksamen Körperdicken d_w ist

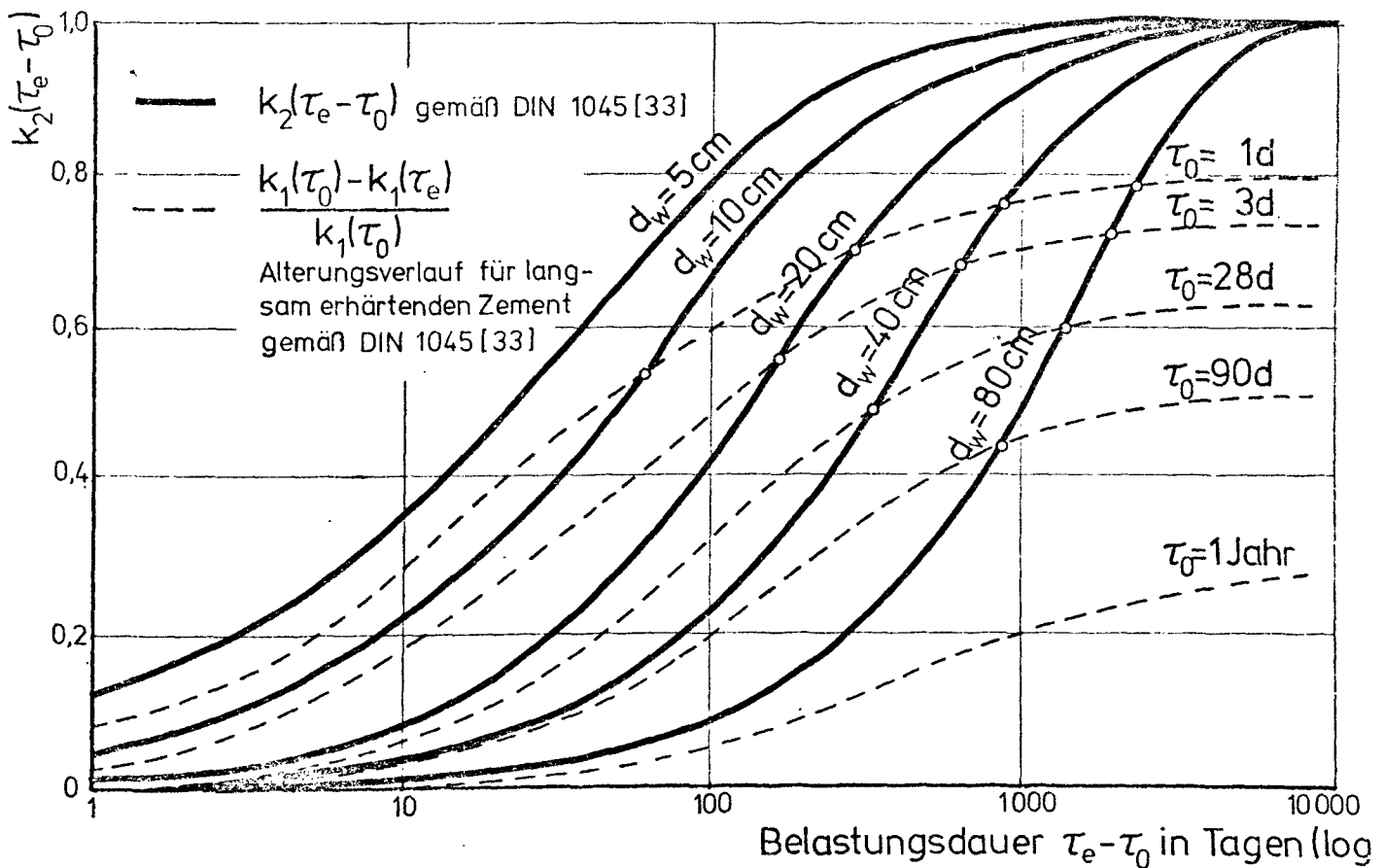


Bild 3-15 Vergleich der Kriechdehnungen zum Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ und $t = \tau_e$ für eine Belastungsgeschichte gemäß Bild 3-14

hier der zeitliche Verlauf des Kriechens in bezogener Form $k_2(\tau_e - \tau_0)$ gemäß DIN 1045 [33] dargestellt (durchgezogene Linien). In Abhängigkeit vom Erstbelastungsalter τ_0 wurde Gleichung (3-48) in den gestrichelten Linien ausgewertet. Liegt nun eine gestrichelte Linie oberhalb einer bestimmten d_w -Kurve

(durchgezogene Linie), so wird zum Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ vom "Affinen Kriechen" für eine Belastungsgeschichte gemäß Bild 3-14 eine größere Kriechdehnung vorhergesagt als zum Zeitpunkt der Entlastung.

Belastet man einen Beton z. B. erstmals zum Zeitpunkt $\tau_0 = 28$ Tage, so ist für $d_w = 20$ cm bis zu einer Belastungsdauer von etwa 160 Tagen zum Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ eine größere Kriechdehnung als zum Zeitpunkt $t = \tau_e$ zu erwarten, obwohl zum Zeitpunkt $t = \tau_e$ eine Vollentlastung durchgeführt wurde.

Es ist offensichtlich, daß der Alterungsansatz in der Theorie des affinen Kriechens eine wichtige Rolle bei der Voraussage der Kriechdehnungen nach Entlastung spielt.

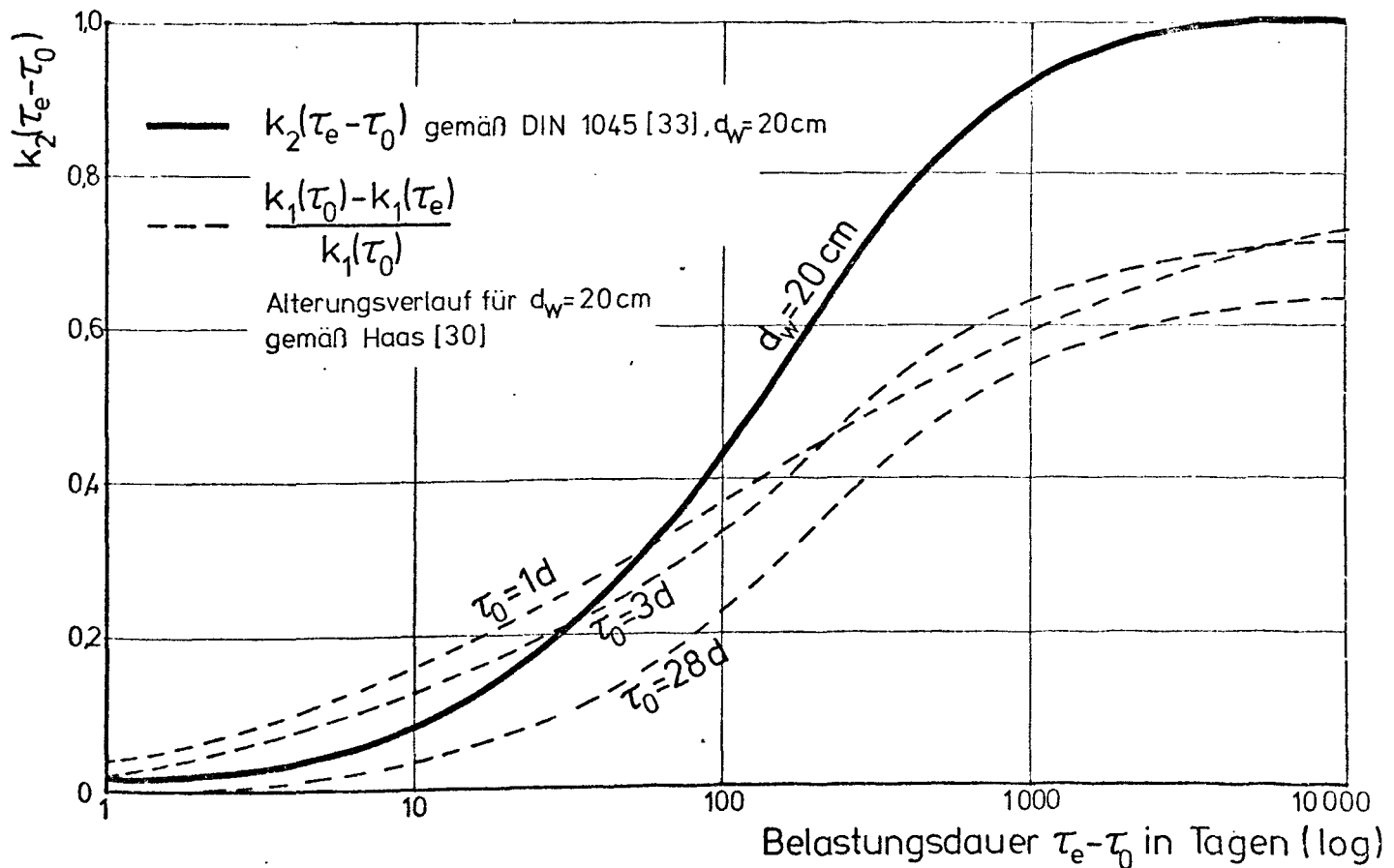


Bild 3-16 Vergleich der Kriechdehnungen zum Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ und $t = \tau_e$ für eine Belastungsgeschichte gemäß Bild 3-14. Verbesserter Alterungsverlauf in Abhängigkeit von d_w gemäß Haas [30]

In der DIN 1045 [33] wird lediglich der zeitliche Ablauf $k_2(t-\tau)$, nicht aber der Alterungsverlauf $k_1(\tau)$ als abhängig von der wirksamen Körperdicke d_w betrachtet. Wie von Haas [30] dargelegt wurde, führt dies bei der Ermittlung von Relaxationskurven mit Hilfe der Kriechtheorie des affinen Kriechens dazu, daß sich für große Werte von d_w unsinnige Endwerte der Spannungsrelaxation ergeben, d. h. anfängliche Druckspannungen gehen über in Zugspannungen. Haas setzt daher auch den Alterungsverlauf in Abhängigkeit von d_w (siehe Bild 5.9 und Tabelle 5.3 in [30]). Aber auch mit einem solchermaßen korrigierten Alterungsverlauf kann nicht vermieden werden, daß sich unsinnige Ergebnisse für den Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ nach Entlastung ergeben, wie dies am Beispiel $d_w = 20$ cm in Bild 3-16 gezeigt wird. Auch hier ergeben sich für Erstbelastungszeitpunkte von z. B. $\tau_0 = 1$ d bzw. $\tau_0 = 3$ d unsinnige Werte nach Entlastung bis zu einer Belastungsdauer von 56 d respektive 33 d.

Untersucht man einige Produktansätze der Literatur hinsichtlich der Forderung 2., so bedeutet dies, daß sich bei diesen Ansätzen mit den Bezeichnungen von Bild 3-14 Werte t^* angeben lassen, ab denen eine Zunahme der Kriechdehnung nach Entlastung erfolgt. An dieser Stelle sollen beispielhaft die Produktansätze von Bažant, Osman und Thonguthai [3], von DIN 1045 [33] und dem ACI-Committee [46] untersucht werden.

Zur Ermittlung des Kriechverhaltens wurde von Bažant, Osman und Thonguthai die folgende Kriechfunktion angesetzt:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_i \tau^{-m} (t - \tau)^n \quad (3-49)$$

Analog zu Glg. (3-47) ergibt sich als Kriechfunktion nach Entlastung:

$$\varphi^*(t, \tau) = \varphi_i \tau_0^{-m} \cdot (t - \tau_0)^n - \varphi_i \tau_e^{-m} (t - \tau_e)^n \quad (3-50)$$

Mit der Substitution $t_e = t - \tau_e$ ergibt sich hieraus:

$$\varphi^*(t_e, \tau) = \varphi_i \tau_0^{-m} \cdot [t_e + (\tau_e - \tau_0)]^n - \varphi_i \tau_e^{-m} \cdot t_e^n \quad (3-51)$$

Die Existenz eines Minimums dieser Funktion liefert die Bedingung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi^*(t_e, \tau)}{dt_e} &\stackrel{!}{=} 0 = \tau_0^{-m} n (t_e + (\tau_e - \tau_0))^{n-1} - \tau_e^{-m} n t_e^{n-1} \\
 \left[\frac{t_e + (\tau_e - \tau_0)}{t_e} \right]^{n-1} &= \left(\frac{\tau_e}{\tau_0} \right)^{-m} \\
 (n-1) \cdot \ln \left[\frac{t_e + (\tau_e - \tau_0)}{t_e} \right] &= -m \cdot \ln \left(\frac{\tau_e}{\tau_0} \right) \\
 \frac{t_e + (\tau_e - \tau_0)}{t_e} &= e^{\frac{m \cdot \ln(\frac{\tau_e}{\tau_0})}{1-n}} \\
 \rightarrow t^* &= \frac{\tau_e - \tau_0}{\frac{m \cdot \ln(\frac{\tau_e}{\tau_0})}{e^{1-n}} - 1} \quad (3-52)
 \end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Gleichung in Abhängigkeit von der Belastungsdauer $\tau_e - \tau_0$ mit dem Erstbelastungszeitpunkt τ_0 als Parameter ist für verschiedene Werte m und n in Bild 3-17 durchgeführt. Man sieht, daß der Zeitpunkt t^* umso früher liegt, je eher die Erstbelastung erfolgte, je kürzer die Belastungsdauer $\tau_e - \tau_0$ war, je ausgeprägter die Alterung des Betons ist (größere Werte von m) und je stärker das Kriechen des Betons ist (größere Werte von n).

In ähnlicher Weise kann man beim Produktansatz gemäß [33] verfahren. Da der zeitliche Verlauf des Kriechens optimal nur durch einen Ansatz gemäß Glg. (2-18) anzunähern ist, wurde hier mit dem von Haas [30] beschriebenen Näherungsverfahren gearbeitet. Für den Alterungsverlauf wurde eine Regressionsanalyse auf der Basis von Glg. (2-10) durchgeführt, die den Verlauf in der DIN 1045 ab $\tau = 7$ Tage sehr gut annähern kann. Die Koeffizienten a und b sind der Tabelle 3-1 zu entnehmen. Eine Auflösung der ersten Ableitung

$$\frac{d\varphi^*(t_e, \tau)}{dt_e} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{v_i}{\tau_{ki}} \cdot e^{-\frac{[t_e + (\tau_e - \tau_0)]}{\tau_{ki}}}}{\sum_{i=1}^4 \frac{v_i}{\tau_{ki}} \cdot e^{-\frac{t_e}{\tau_{ki}}}} = \left(\frac{\tau_e}{\tau_0} \right)^{-b} \quad (3-53)$$

nach t_e bzw. t^* ist explizit nicht möglich. Glg. (3-53) wurde daher iterativ ausgewertet. Für 3 verschiedene Werte des Erstbelastungszeitpunktes τ_0 ist das

Tabelle 3-1 Alterungsverlauf $k_1(\tau) = a \cdot \tau^{-b}$ gemäß DIN 1045 [33]

Zementart	Koeffizienten	
	a	b
langsam erhärtend	2,3598	+ 0,2591
schnell erhärtend	2,1085	+ 0,3272

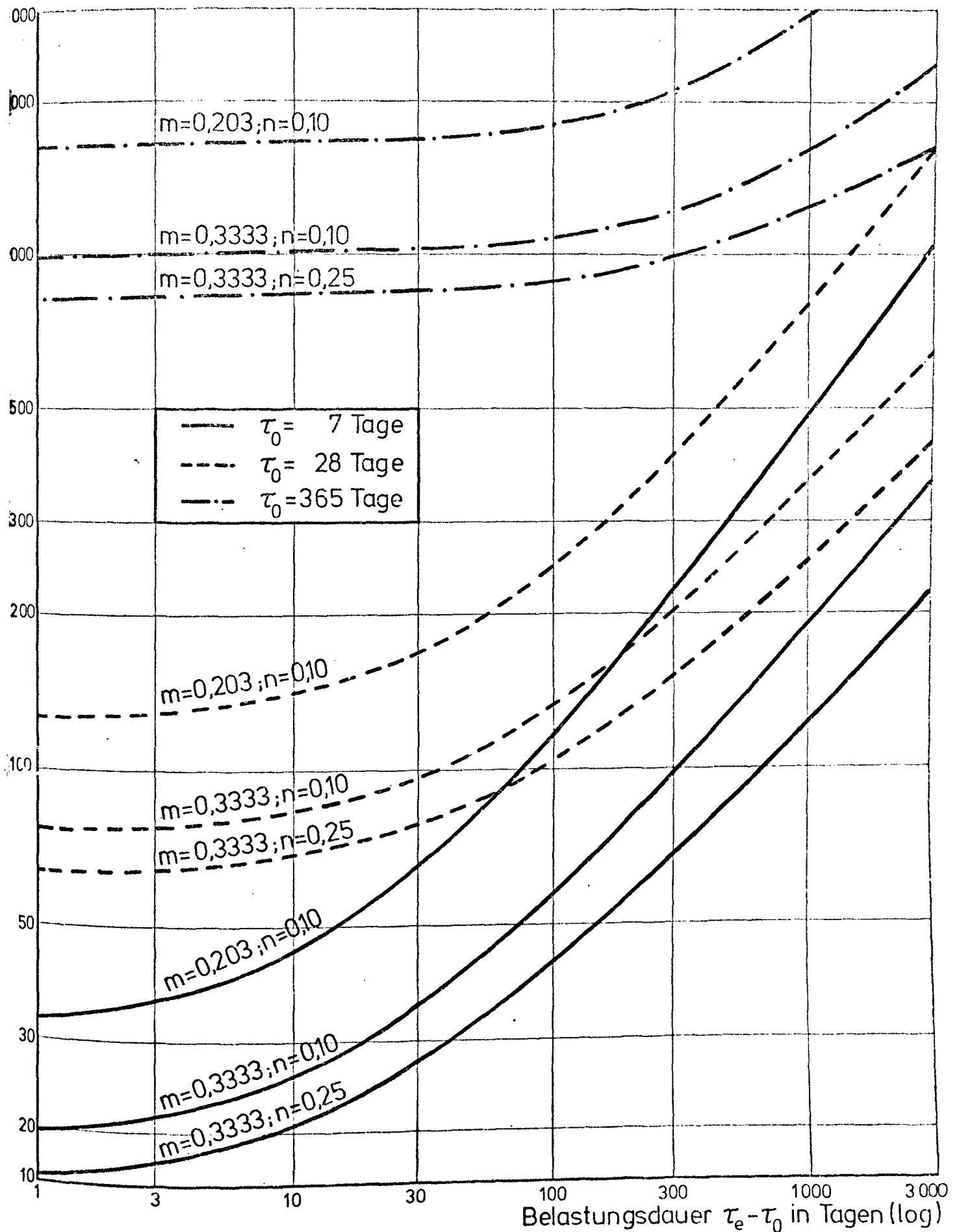


Bild 3-17 Zeitpunkt t^* , ab dem nach Entlastung der Kriechdehnungen wieder zunehmen.

Kriechtheorie des affinen Kriechens [Produktansatz (P)] gemäß Bažant, Osman und Inghouthai [3]. Superposition zweier jungfräulicher Kriech-

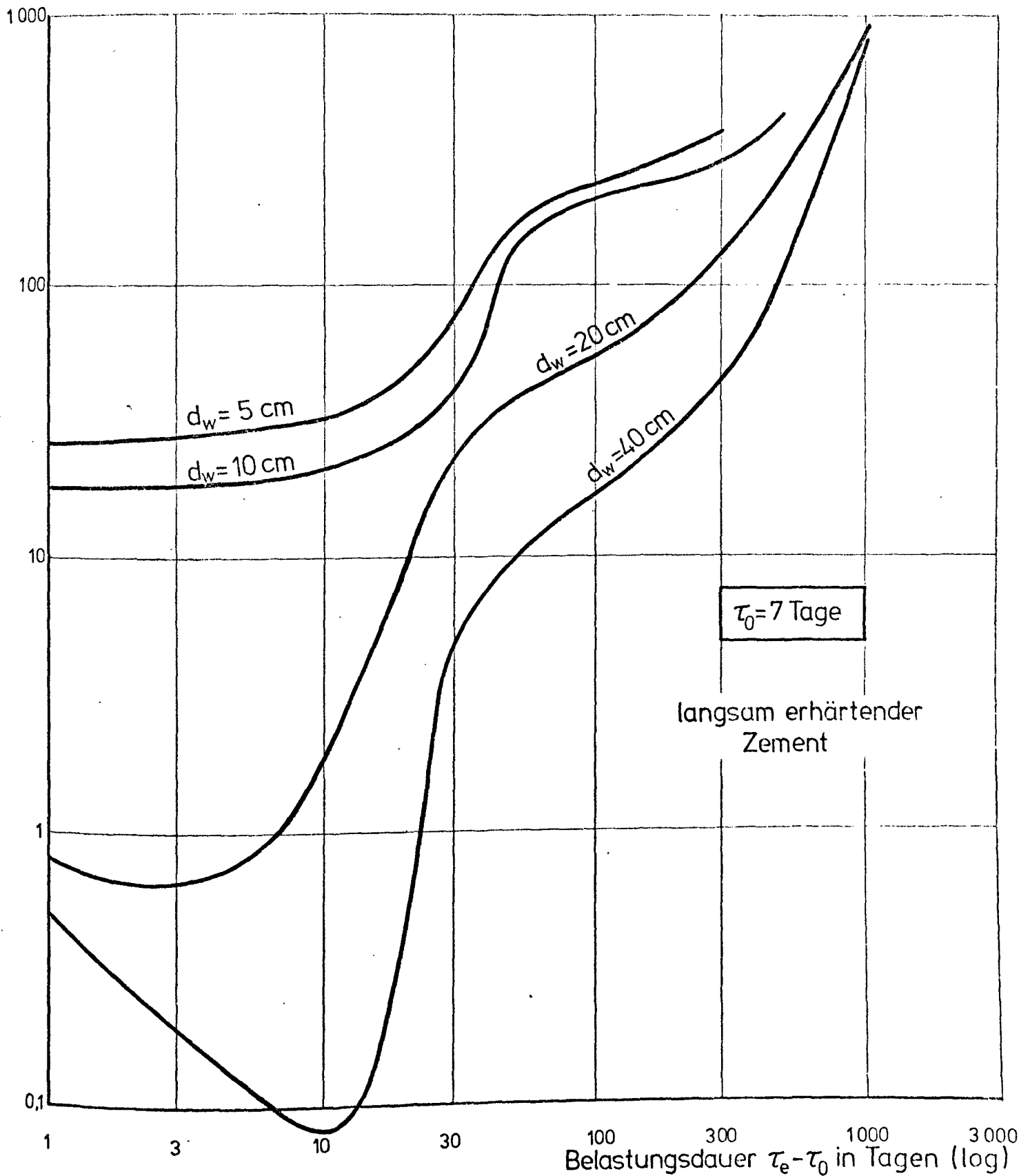


Bild 3-18 Zeitpunkt t^* , ab dem nach Entlastung die Kriechdehnungen wieder zunehmen.
Kriechtheorie des affinen Kriechens [Produktansatz (P)] gemäß DIN 1045
[33]. Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven.

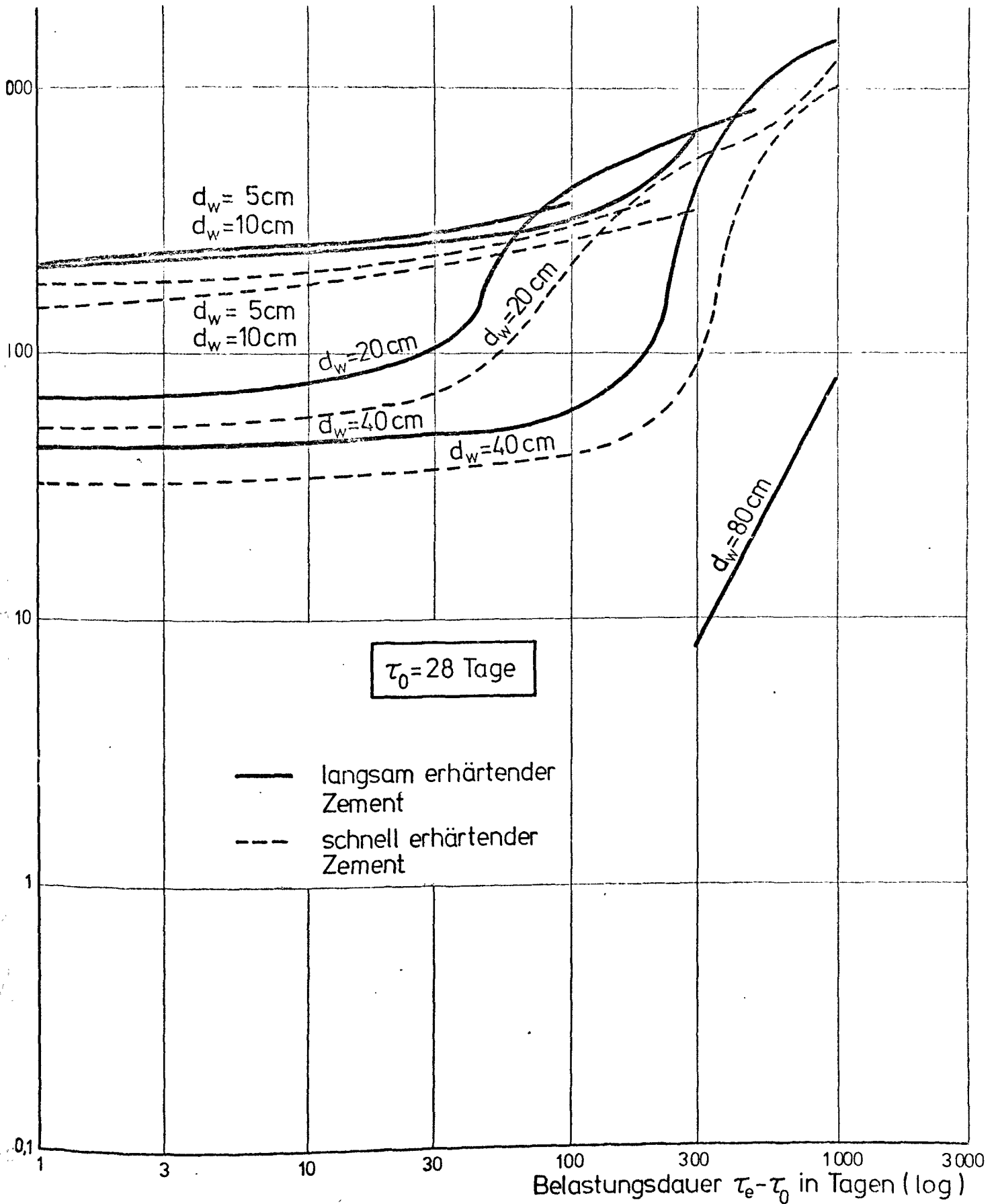


Bild 3-19 Zeitpunkt t^* , ab dem nach Entlastung die Kriechdehnungen wieder zunehmen.

Kriechtheorie des affinen Kriechens [Produktansatz (P)] gemäß DIN 1045 [33]. Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven.

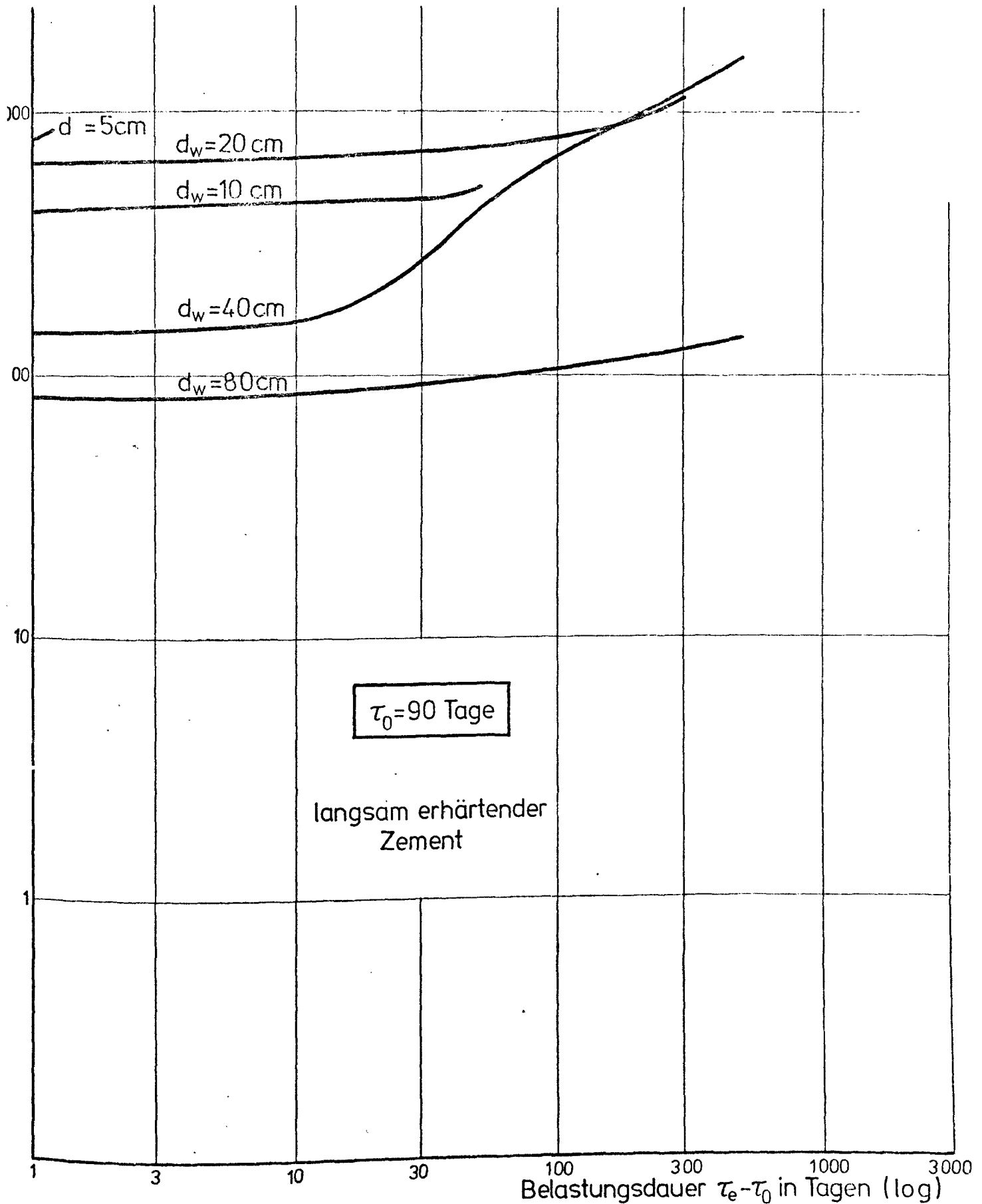


Bild 3-20 Zeitpunkt t^* , ab dem nach Entlastung die Kriechdehnungen wieder zunehmen. Kriechtheorie des affinen Kriechens [Produktansatz (P)] gemäß DIN 1045 [33]. Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven.

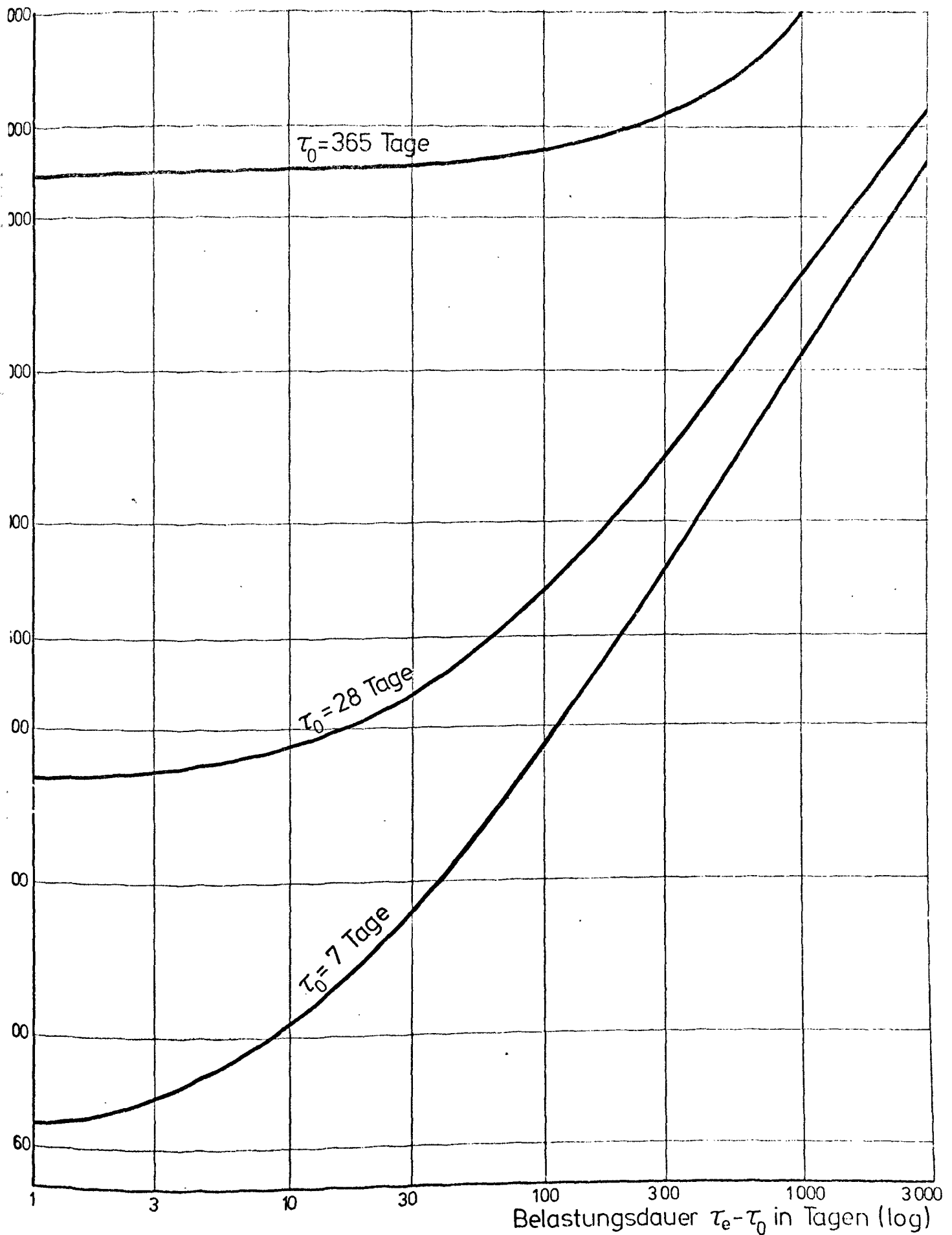


Bild 3-21 Zeitpunkt t^* , ab dem nach Entlastung die Kriechdehnungen wieder zunehmen

Kriechtheorie des affinen Kriechens [Produktansatz (P)] gemäß den Empfehlungen des ACI-Committees 209 [46], Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven.

Ergebnis in den Bildern 3-18 bis 3-20 dargestellt. Es zeigen sich die gleichen Tendenzen wie in Bild 3-17, jedoch nicht in der gleichen Klarheit, da der Ansatz für den zeitlichen Verlauf des Kriechens von der Güte der Approximation abhängig ist und dadurch den unregelmäßigen Verlauf der Kurven erklärt.

In ähnlicher Weise ließen sich die Zeitpunkte t^* für weitere Produktansätze konstruieren, wie zum Beispiel für den Ansatz des ACI-Committees [46]:

$$\varphi^*(t_e, \tau) = 1,25 \tau_0^{-\delta} \frac{[t_e + (\tau_e - \tau_0)]^\beta}{10 + [t_e + (\tau_e - \tau_0)]^\beta} - 1,25 \tau_e^{-\delta} \frac{t_e^\beta}{10 + t_e^\beta} \quad (3-54)$$

Bedingt durch die schwächer ausgeprägte Alterungsfunktion $k_1(\tau) = 1,25 \cdot \tau^{-0,118}$ sind die Werte t_e bzw. t^* , bei denen ein Vorzeichenwechsel der Dehngeschwindigkeit nach Entlastung eintritt (siehe Bild 3-21), größer als etwa bei DIN 1045. Man erkennt, daß nahezu jeder Produktansatz diesen "Defekt" aufweist, daß er nämlich eine Dehnungsumkehr im Einstufenversuch nach Entlastung vorhersagt, die experimentell nicht nachweisbar, werkstoffkundlich unsinnig und thermodynamisch unbegründet ist (siehe Nielsen [113]).

Die Forderung 3. soll durch einige ausgewählte Versuchsergebnisse belegt werden. Als Beispiele hierzu mögen die Bilder 3-22 bis 3-25 dienen. Die Bilder 3-22 und 3-23 enthalten Ergebnisse, die bisher noch unveröffentlichten Münchener Versuchen¹⁾ entnommen wurden. Im jeweils unteren Bildteil sind die gemessenen Dehnwerte nach Entlastung eines Versuchs gemäß Bild 3-14 dargestellt (Kurve a). Sie nehmen monoton ab. Eine der Kurve a entsprechende Kurve b kann man sich grafisch ermitteln, indem man zwei unter Belastung ermittelte jungfräuliche Kriechkurven entsprechend der Beziehung

$$\epsilon_k(t > \tau_e) = \epsilon_k(\tau_0 t - \tau_0) - \epsilon_k(\tau_e t - \tau_e) \quad (3-55)$$

superponiert. Wie man sieht, weist die auf diese Art erhaltene Kurve im Gegensatz zu Kurve a ein Minimum auf. Zur Verdeutlichung sind die Kriechkurven entsprechend einer Regressionsanalyse auf der Basis von Glg. (2-10) extrapoliert worden.

1) Diese Versuchsergebnisse wurden dem Verfasser in Auszügen freundlicherweise von Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Hubert Rüsck zur Verfügung gestellt.

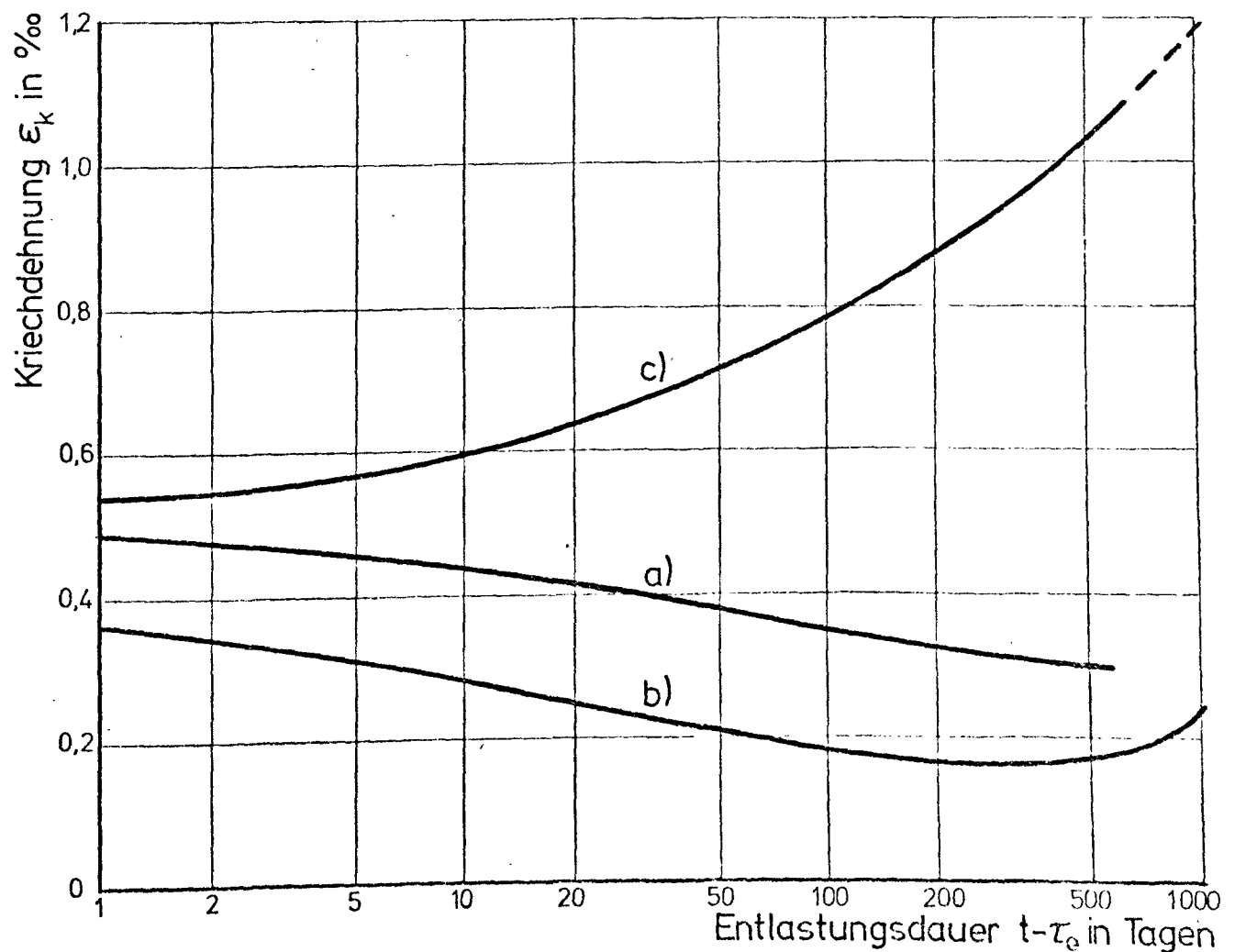
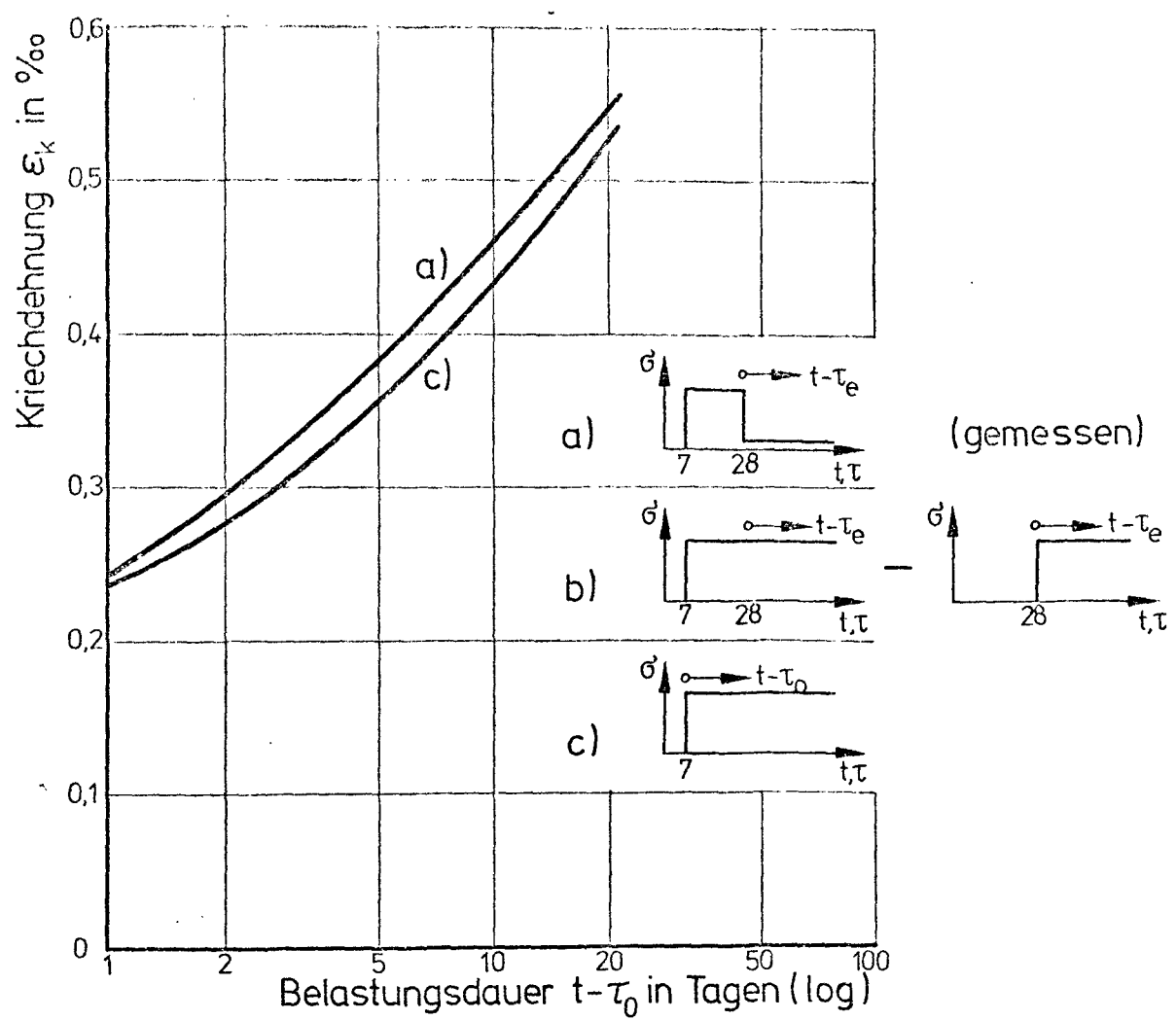


Bild 3-22 Kriechdehnung nach Entlastung. Vergleich von Messung und grafischer Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven. Herkunft: Unveröffentlichte Münchener Versuche [siehe Abschn. 3.3.]

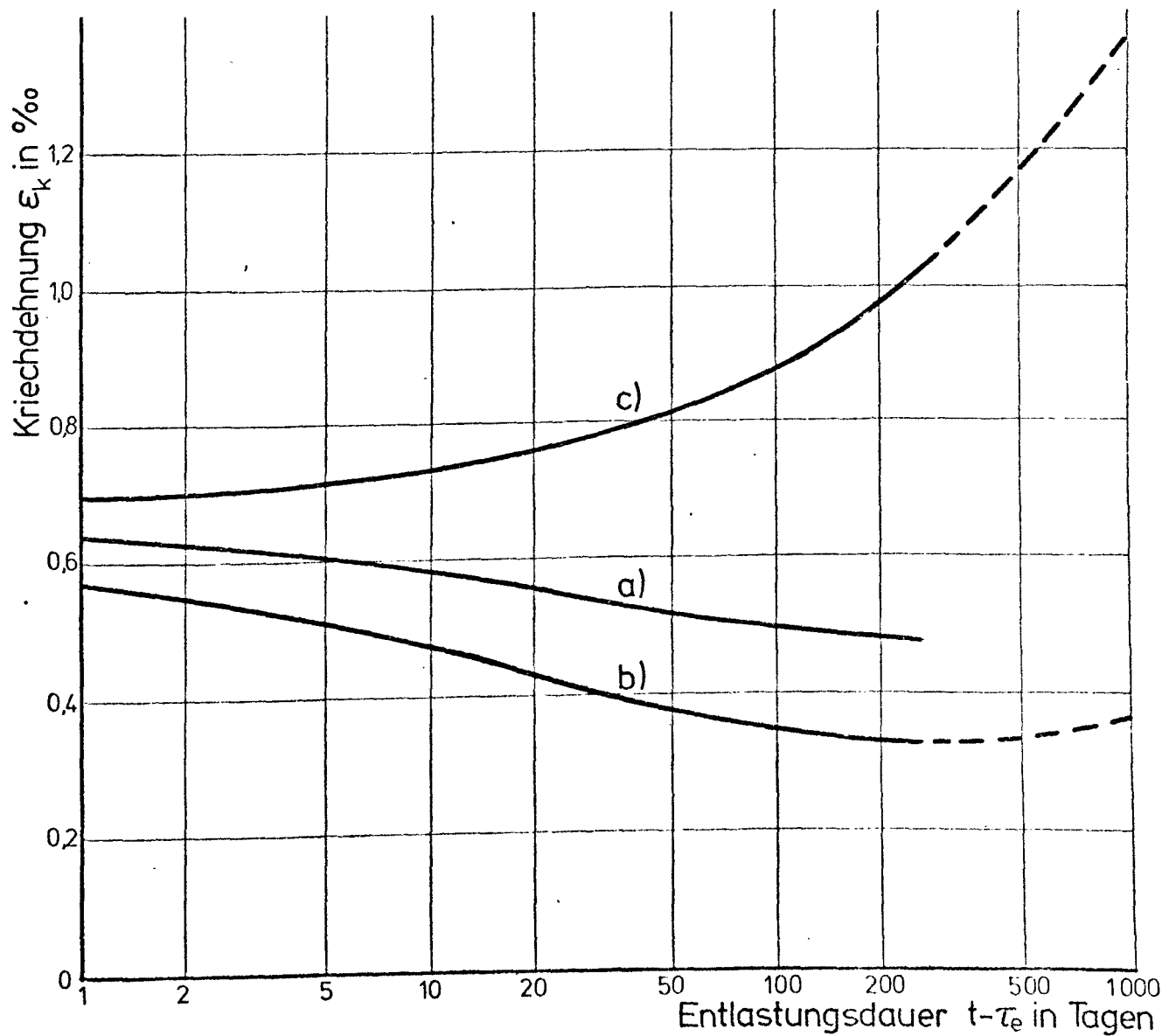
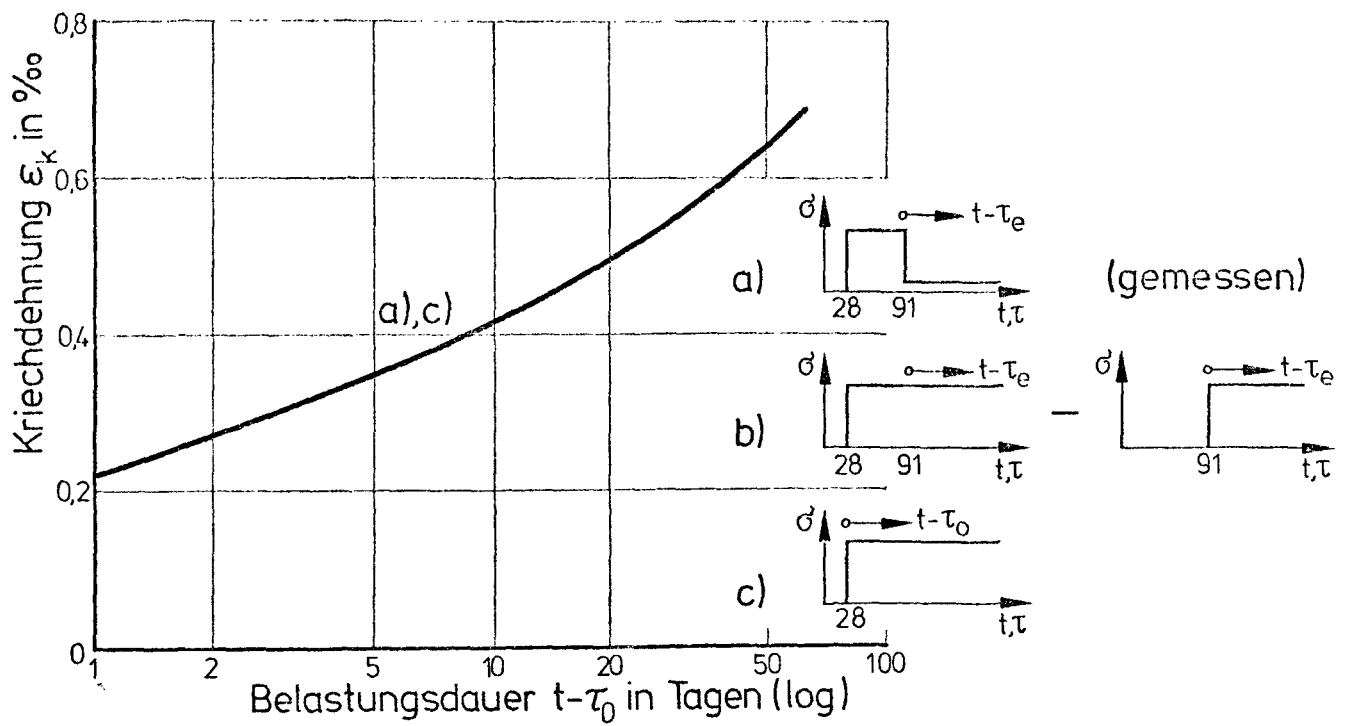


Bild 3-23 Kriechdehnung nach Entlastung. Vergleich von Messung und grafischer Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven. Herkunft: Unveröffentlichte Münchener Versuche [siehe Abschn. 3.3.]

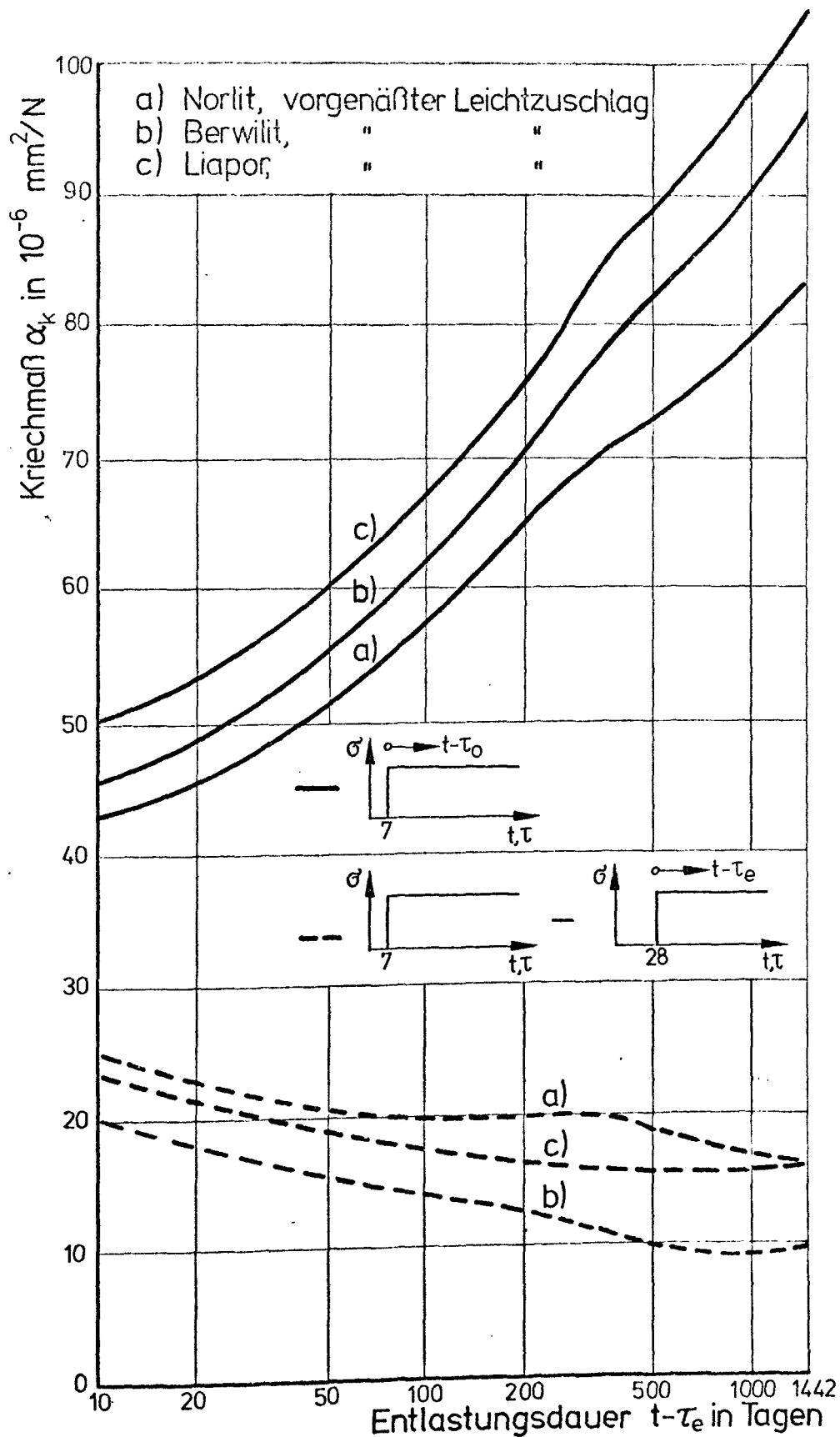


Bild 3-24 Kriechmaß nach Entlastung. Ermittlung durch Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven. Herkunft: Rostásy, Teichen, Alda [64].

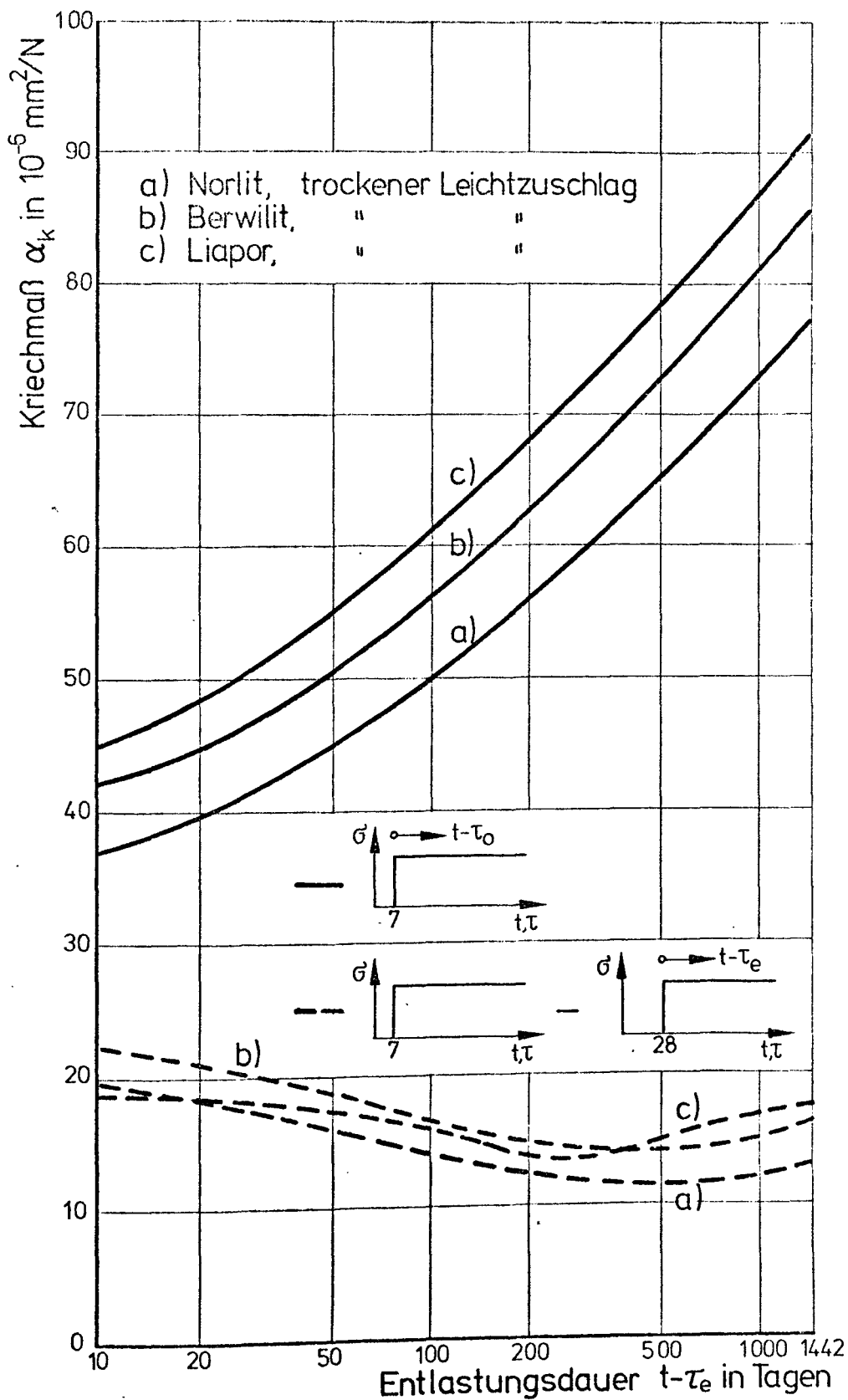


Bild 3-25 Kriechmaß nach Entlastung. Ermittelt durch Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven. Herkunft: Rostásy, Teichen, Alda [64].

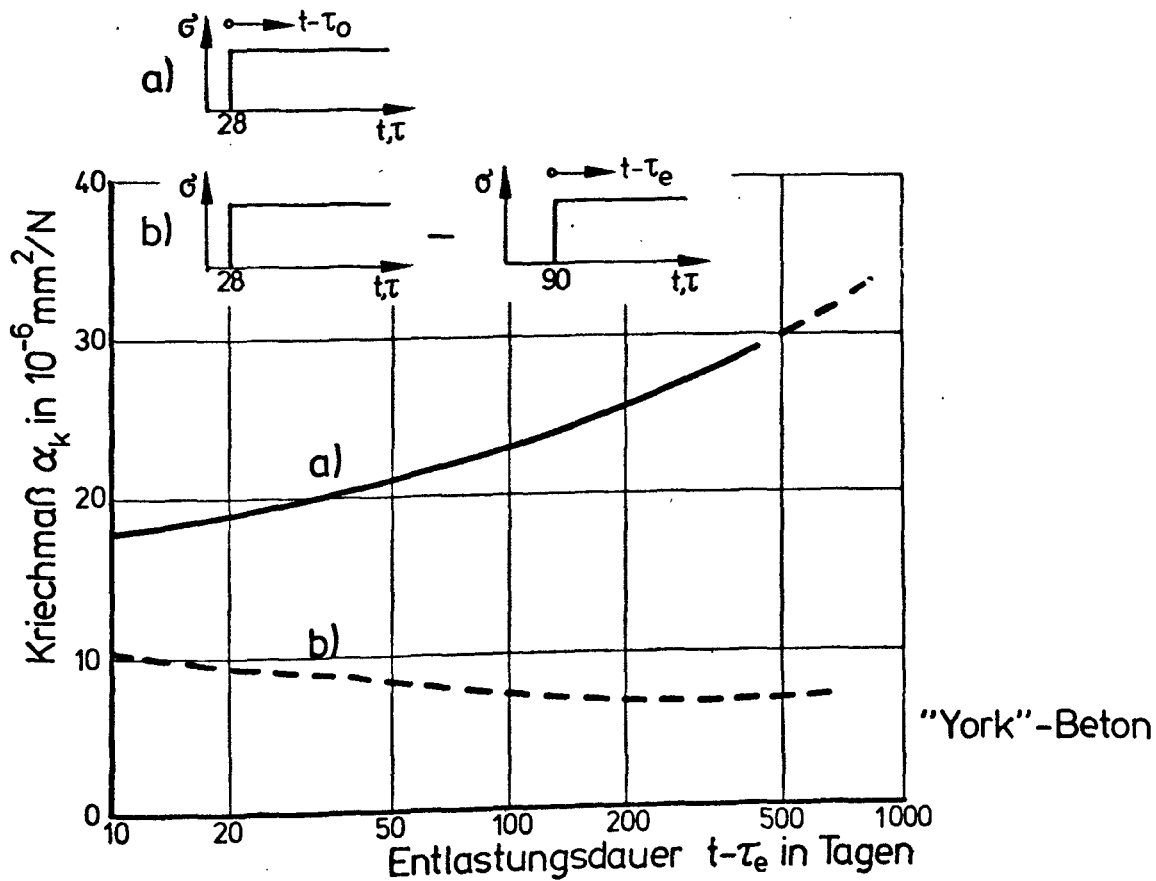
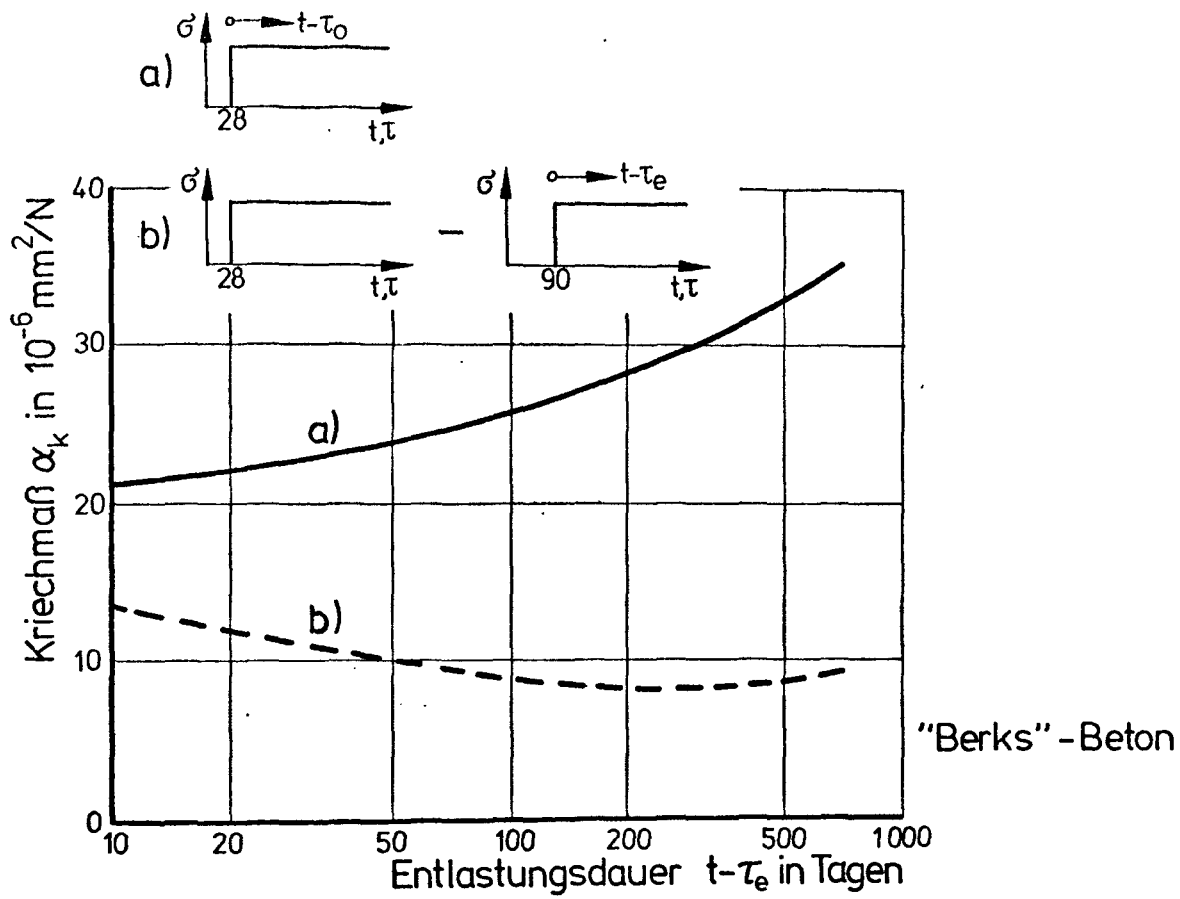


Bild 3-26 Kriechmaß nach Entlastung. Ermittelt durch Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven. Herkunft: Komendant, Polivka, Pirtz [65]

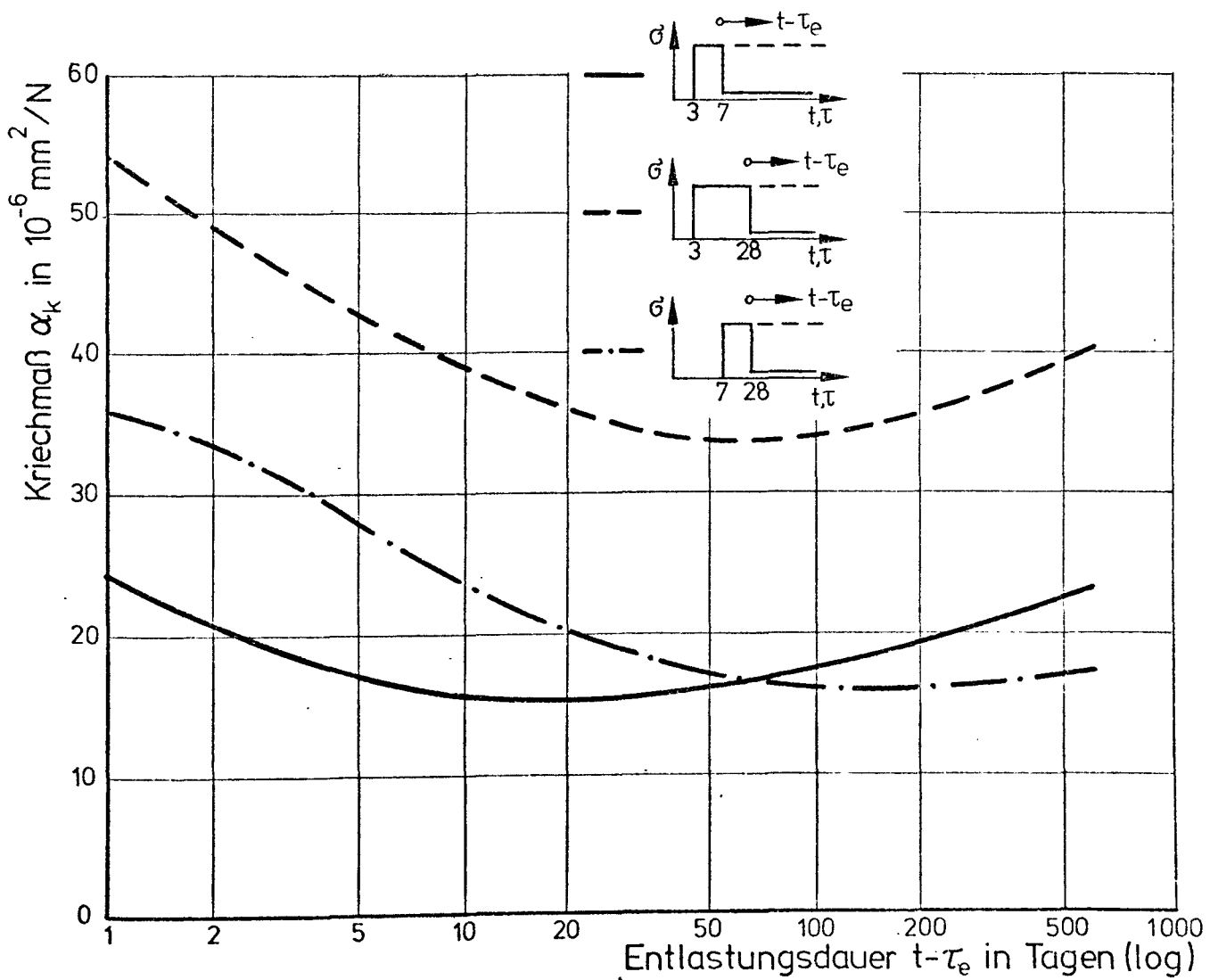


Bild 3-27 Kriechmaß nach Entlastung. Ermittelt durch Superposition zweier jungfräulicher Kriechkurven. Herkunft: Wesche, v.Berg, Schrage [66]

In Analogie zu den Kurven b der Bilder 3-22 und 3-23 wurden die gestrichelten Kurven der Bilder 3-24 und 3-25 ermittelt. Sie stammen aus Untersuchungen des Kriechens von Leichtbeton bei unterschiedlicher Korneigenfeuchtigkeit der Leichtzuschläge, die von Rostásy, Teichen und Alda [64] durchgeführt wurden. Bis auf eine Ausnahme weisen alle Versuchsserien den oben erwähnten "Defekt" auf, nämlich ein Minimum in der gemäß Superposition aus zwei Kriechkurven ermittelten "Entlastungskurve". Waren in den Münchener Versuchen noch gleiche Kriechspannungen angelegt worden, so waren sie in [64] annähernd gleich. Auch bei größeren Zeiträumen bei der "Belastungsdauer" $\Delta t = \tau_e - \tau_0$ ist der "Defekt" nachzuweisen, wie die Versuche an versiegelten Normalbetonproben von Komendant, Polivka und Pirtz [65] zeigen, die in Bild 3-26 dargestellt sind. Die Belastungsdauer betrug hier immerhin 2 Monate.

Die in den Bildern 3-17 bis 3-20 aufgezeigten Tendenzen, daß das Minimum umso eher auftritt, je früher und je kürzer der Beton belastet wurde, wird ebenfalls im letzten Beispiel bestätigt, das in Bild 3-27 dargestellt ist. Die Versuchsergebnisse stammen von Wesche, v. Berg und Schrage [66].

Es bleibt festzuhalten, daß jeder Produktansatz (affines Kriechen) als Linearansatz - und damit automatisch verknüpft das Superpositionsprinzip - den beschriebenen Defekt erzeugt, wenn bestimmte Voraussetzungen hinsichtlich der gewählten Funktion für den zeitlichen Verlauf des Kriechens bzw. der Alterungsfunktion erfüllt sind. Abhilfe schaffen kann hier z. B. eine "Korrekturfunktion", die die Beeinflussung der Kriecheigenschaften des Betons durch eine Vorbelastung erfaßt. Mit den Bezeichnungen von Bild 3-28 muß auf jeden Fall gelten:

$$A' < A$$

Daher muß vor allem $\varepsilon_k(\sigma_3)$ für kleine Werte $t - \tau_e$ korrigiert werden, damit die Kurve $[\varepsilon_k(\sigma_2) + \varepsilon_k(\sigma_3)]$ auf die Kurve $[\varepsilon_k(\sigma_1)]$ für $t > \tau_e$ angehoben werden kann. Dies wird von Dilger, Ghali und Kountouris [67] mit der folgenden Korrekturfunktion erreicht:

$$R = 0,6 + \frac{t - \tau_e}{40 + 3,2(t - \tau_e)} \quad \text{für} \quad \frac{d\sigma(t)}{d\tau} < 0 \quad (3-56)$$

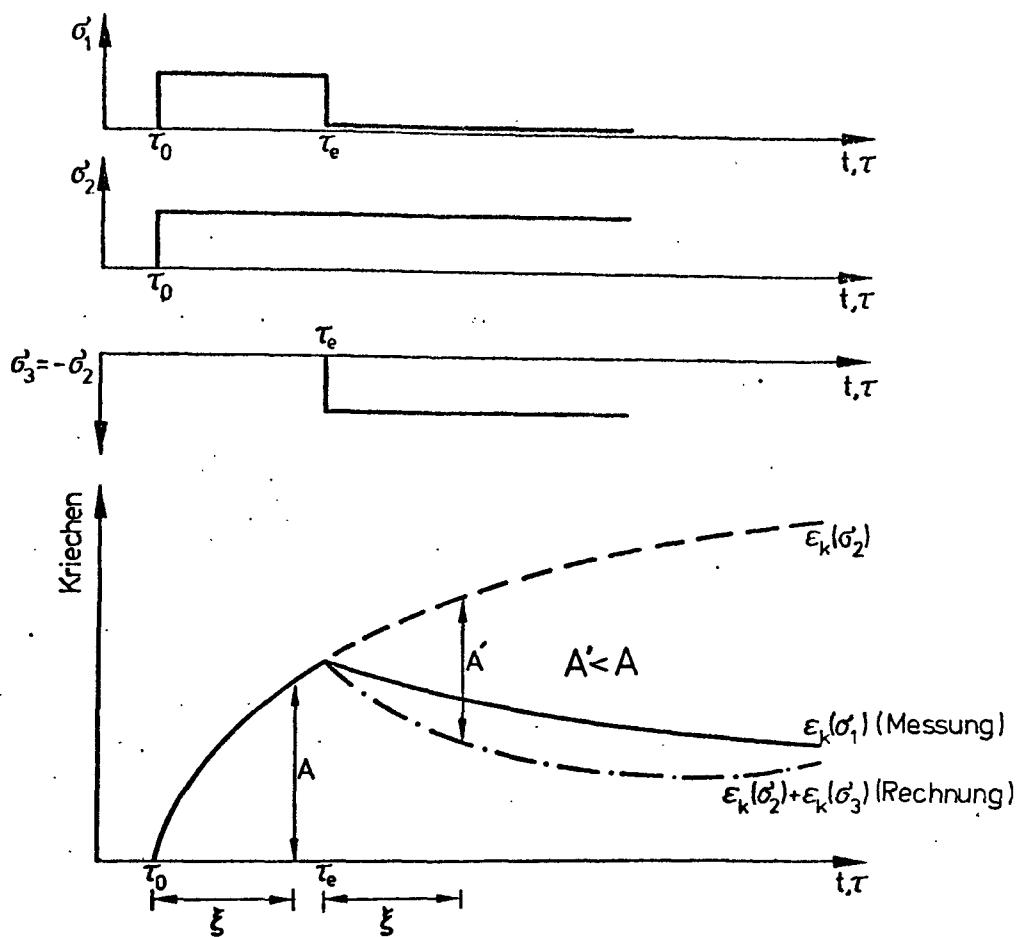


Bild 3-28 Kriechdehnung nach Entlastung. Gegenüberstellung von Messung $[\epsilon_k(\sigma_1)]$ und Rechnung $[\epsilon_k(\sigma_2) + \epsilon_k(\sigma_3)]$

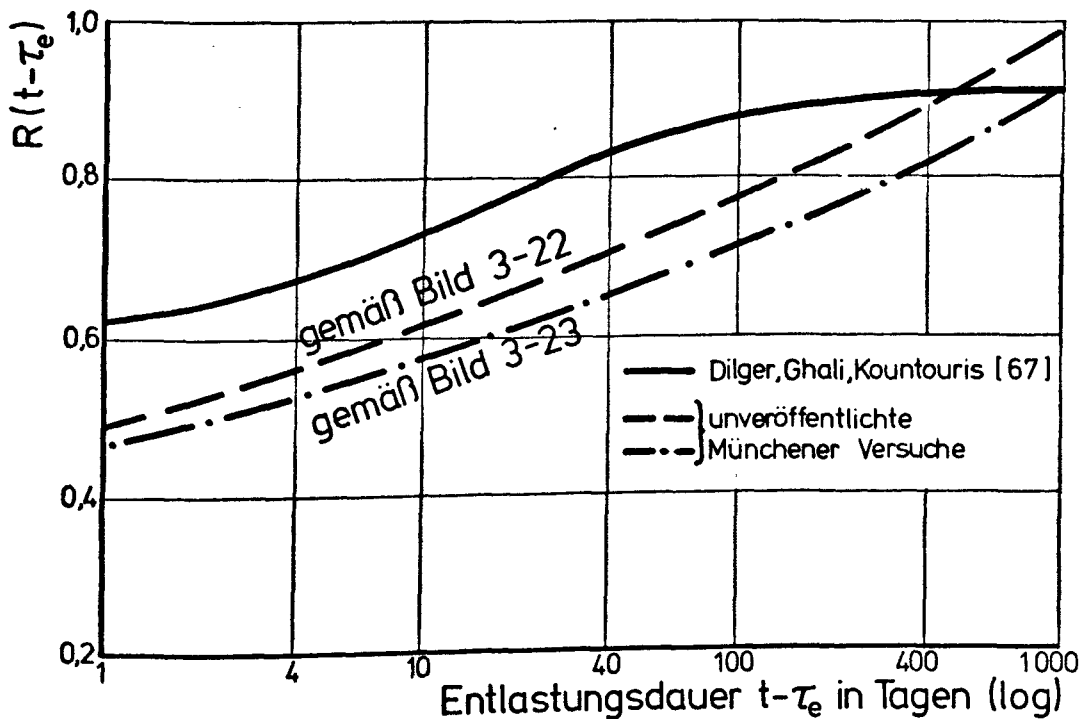


Bild 3-29 Verlauf des Korrekturfaktors $R(t - \tau_e)$ nach Dilger, Ghali und Kountouris [67] bzw. nach unveröffentlichten Münchener Versuchen

Für steigende Spannungen wird in [67] gesetzt:

$$R(t-\tau_e) = 1 \quad \text{für } \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \geq 0 \quad (3-56a)$$

Der Verlauf von Glg. (3-56) ist in Bild 3-29 dargestellt.

Das Integral (3-24) geht unter diesen Voraussetzungen über in:

$$\epsilon_k(t) = \frac{1}{E} \int_{\tau_0}^t R \cdot \varphi_{\infty}(\tau) \cdot k(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (3-57)$$

R ist gemäß Glg. (3-56) bzw. (3-56a) einzusetzen.

In dieser Integralgleichung wird also eine Nichtlinearität von Spannung und Kriechdehnung angenommen, die lediglich vom Vorzeichen der Spannungsgradienten abhängt. Der Ansatz von R berücksichtigt als Korrekturfunktion die Forderung 3, befriedigt jedoch nach wie vor nicht die Forderung 2, da bei Ansatz von

$$\varphi_{\infty}(\tau) = \frac{10,29}{5 + \sqrt{\tau}} \quad (3-58)$$

$$k(t-\tau) = 0,1315 \cdot \ln[(t-\tau)+1] \quad (3-59)$$

gemäß [67] die Dehnung gemäß Glg. (3-55) bzw. (3-57) nach Entlastung im Einstufenversuch ein Minimum durchläuft, wie durch Vorgabe von Wertepaaren τ_0 und τ_e unschwer überprüft werden kann.

Der zeitliche Verlauf der Korrekturfunktion R in Glg. (3-56) hält einem Vergleich mit anderen Versuchsergebnissen nicht stand, wie Bild 3-29 zeigt. Als Vergleich wurden die Ergebnisse der bereits erwähnten unveröffentlichten Münchener Versuche (Bilder 3-22 und 3-23) herangezogen. Wichtig für die Ermittlung der Abweichung vom Superpositionsprinzip entsprechend der Forderung 3. ist es, lediglich die Kriechdehnungen zu betrachten. Gemäß den Bezeichnungen von Bild 3-30 liefert die "Überprüfung" des Superpositionsprinzips gemäß der Formel von Haas [30]:

$$\eta = \frac{S-Q}{P} \quad (3-60)$$

ein verzerrtes Bild von der Unkorrektheit des Superpositionsprinzips gemäß Produktansatz. Gleichung (3-60) müßte korrekt lauten:

$$\eta' = R = \frac{P'+Q}{S'} \quad (3-61)$$

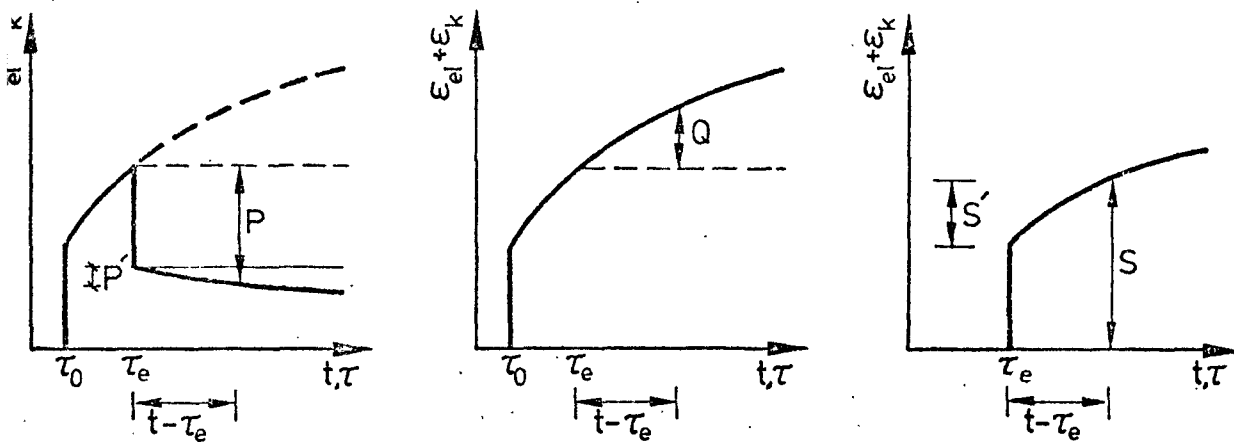


Bild 3-30 "Überprüfung" des Superpositionsprinzips

Im Gegensatz zum Produktansatz erfüllt der Summenansatz gemäß [47] die Forderungen 1. und 2. uneingeschränkt. Der Fließanteil liefert nur irreversible Verformungen und deshalb bei Entlastung kein Rückkriechen. Der verzögert-elastische Anteil liefert nach Entlastung eine monoton fallende Funktion ϵ_v ($t > \tau_e$), die gegen 0 konvergiert. Beschreibt man z. B. den zeitlichen Verlauf für die verzögerte Elastizität mit Glg. (2-18) in allgemeiner Form, so geht Glg. (3-47) unter der Berücksichtigung, daß die verzögerte Elastizität altersunabhängig angesetzt wird, über in

$$t > \tau_e: \epsilon_v(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \varphi_{v\infty} \left[\sum_{i=1}^n v_{vi} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_0}{\alpha_{vi}}} \right) - \sum_{i=1}^n v_{vi} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_e}{\alpha_{vi}}} \right) \right] \quad (3-62)$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung $\sum v_{vi} = 1$ ergibt sich daraus:

$$\epsilon_v(t) = \sum_{i=1}^n v_{vi} e^{-\frac{t}{\alpha_{vi}}} \left(e^{\frac{\tau_e}{\alpha_{vi}}} - e^{\frac{\tau_0}{\alpha_{vi}}} \right) \quad (3-63)$$

Da der Klammerausdruck wegen $\tau_0 < \tau_e$ immer > 0 ist, muß die Funktion ϵ_v gegen Null konvergieren und monoton abnehmend sein, da sich das Verhalten von $e^{-\frac{t}{\alpha_{vi}}}$ auch bei einem Summenausdruck nicht ändert.

Das Problem der Forderung 3. taucht in [47] nicht auf, da die Trennung von ϵ_k in ϵ_v und ϵ_f unmittelbar auf Grund der Ergebnisse des Einstufenversuchs durchgeführt wird.

Die Kritik am Summenansatz gemäß [47] beschränkt sich im wesentlichen auf die folgenden zwei Punkte:

- a) Mit dem Ansatz Whitney'schen Idealfließens ist die Kriechdehnung eines alternden Betons nur schlecht zu erfassen.
- b) Das in [48] eingeführte spezielle Superpositionsprinzip für die verzögert-elastische Dehnung ist unbegründet.

Der Ansatz, daß sich bei vorgegebenen Randbedingungen (d_w, ϕ_{fo}) in [47] die Fließfunktionen gemäß dem Whitney'schen Idealfließen für unterschiedlichen Belastungsbeginn τ_0 als Restfunktionen einer einzigen Fließfunktion ergeben, die für den frühestmöglichen Belastungszeitpunkt aufgestellt wurde, hat zur Folge, daß eine Spannungsvorgeschichte unberücksichtigt bleibt und daß das Kriechverhalten von Beton, der im höheren Alter zum ersten Mal belastet wurde, nur unbefriedigend beschrieben werden kann, wie bereits Haas [69, 70] und Bažant [71, 72] festgestellt haben.

Da diese eine Fließfunktion einen Grenzwert besitzt, wird das Kriechverhalten eines sehr spät erstmals belasteten Betons nur von der verzögerten Elastizität bestimmt. Dies steht im Widerspruch zu den Versuchsergebnissen von Wesche, v. Berg und Schrage [66]. Wie aus Tabelle 3-2 zu ersehen ist, ist der Fließanteil von sehr spät erstmals belastetem Beton an der Gesamtkriechverformung noch beträchtlich.

Tabelle 3-2 Verformungsanteile am Gesamtkriechen bei sehr altem jungfräulichen Beton

Belastungs- alter τ_0		bezogenes Verformungsmaß $\alpha = \epsilon/\sigma$ verz.			Anteil am Kriechen	
		Kriechen α_k	Fließen α_f	Elastizität α_v	Fließen	Verz.Elastizität
Jahre	Tage	$10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$	$10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$	$10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$	%	%
6	280	25	17	8	68	32
8	135	16	8	8	50	50

Der Summenansatz in der bisher vorliegenden Form [47] trägt vom Aufbau her der Strukturviskosität des Betons Rechnung.

Unbegründet erscheint jedoch die Einführung eines speziellen Superpositionsprinzips für die verzögert-elastischen Dehnungsanteile des Kriechens, wie es

in [4, 48] eingeführt wird, indem für die verzögert-elastische Dehnung ϵ_v nach Vollentlastung der Ansatz

$$t > \tau_e: \epsilon_v(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot 0,4 \cdot \{k_v(\tau_e - \tau_0) [1 - k_v(t - \tau_e)]\} \quad (3-64)$$

gemacht wird. Dieser Ansatz wird damit begründet, daß bei einer Belastungsdauer von weniger als drei Monaten höchstens der bis dahin erreichte Wert für ϵ_v für die Rückverformung bei Entlastung zur Verfügung steht. Diese Bedingung wird jedoch auch von einem Ansatz gemäß der klassischen, linearen Viskoelastizität (Glg. (3-62)) erfüllt. Es ist daher nicht einzusehen, weshalb für die verzögerte Elastizität eine Nichtlinearität von Spannung und Dehnung angenommen wird, die vom Vorzeichen der Spannungsänderung induziert wird.

3.4. Beispiele zur Anwendung der bestehenden Kriechtheorien auf das Dehnungsverhalten bei zyklischer Spannungsgeschichte

Die bisher besprochenen Kriechtheorien sollen im folgenden benutzt werden, um das Dehnungsverhalten infolge einer zyklischen Spannungsgeschichte zu untersuchen. Da gemäß der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit hierbei der Vergleich mit dem statischen Kriechen unter $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ von besonderem Interesse ist, wird der Anteil des statischen Kriechens infolge der Mittelspannung σ_m von der zyklischen Spannungsgeschichte abgespalten. Als Beispiel soll zunächst von einer Dreiecksfunktion gemäß Bild 3-31c für die Spannungsgeschichte ausgegangen werden. Die Dehnungsantwort wird zunächst gemäß dem Summenansatz (S) ermittelt. Dieser beinhaltet die Alterungstheorie (F) beim Fließanteil und die Theorie der elastischen Nachwirkung (V) als Sonderfall des Produktansatzes bei der verzögerten Elastizität. Für die zahlenmäßige Auswertung wurde $\tau_0 = 28$ Tage und die wirksame Körperdicke $d_w = 10$ cm angenommen.

Die Fließfunktion und der zeitliche Verlauf der verzögerten Elastizität wurden gemäß Glg. (2-18) nach der Methode von Haas [30] approximiert. In der Kriechfunktion

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{v\infty} \cdot k_v(t - \tau) + \varphi_{fo} \cdot [k_f(t) - k_f(\tau)] \quad (3-65)$$

wurden gemäß [47] $\varphi_{v\infty} = 0,4$ und $\varphi_{fo} = 1,0$ angenommen. Wertet man nun die Integralgleichung (3-8) für die bereichsweise gültige Spannungsgeschichte

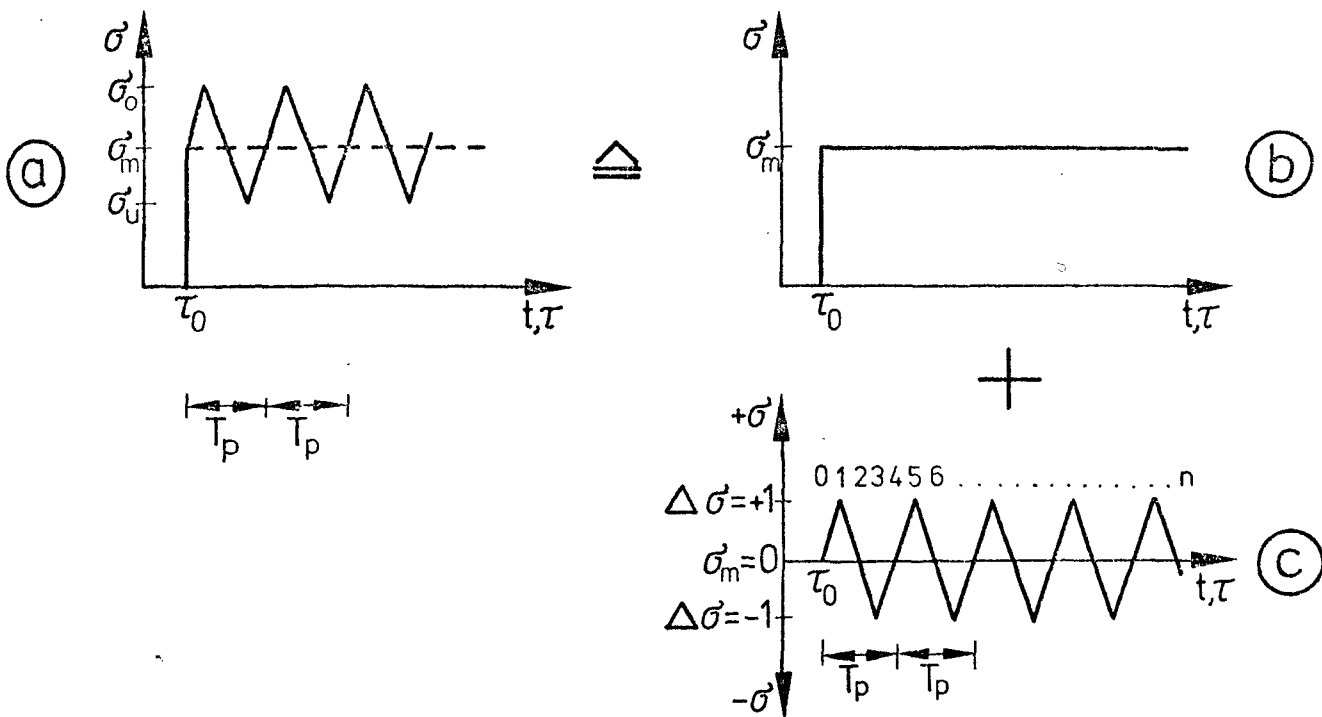


Bild 3-31 Beispiel für eine zyklische Spannungsgeschichte

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial(t)} = \pm m = \pm \frac{4 \cdot \Delta \sigma}{T_p} = \pm 4 \cdot f \quad (3-66)$$

unter Vernachlässigung der elastischen Dehnungsanteile und unter Beachtung von (3-65) bzw. (2-18) aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t) = \frac{4 \cdot \Delta \sigma}{E \cdot T_p} \left\{ \int_{\tau_0}^{t_1} \varphi_{v\infty} \cdot \sum_{i=1}^n v_{vi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\alpha_{vi}}} \right) d\tau \right. \\ \left. + \int_{\tau_0}^{t_1} \varphi_{f\infty} \cdot \sum_{i=1}^n v_{fi} \cdot \left(e^{-\frac{\tau}{\alpha_{fi}}} - e^{-\frac{t_1}{\alpha_{fi}}} \right) d\tau \right\} \quad (3-67) \end{aligned}$$

als Lösung für den Einfluß der ersten Viertelwelle ($\sigma(t) = m \cdot t$ mit $\tau_0 < t < \tau_1$). Nach einigen Umrechnungen erhält man folgenden Ausdruck für die Kriechdehnung der ersten Viertelwelle der Dreiecksfunktion:

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t) = \frac{4 \cdot \Delta \sigma}{E \cdot T_p} \cdot \left\{ \varphi_{v\infty} \cdot \sum_{i=1}^n v_{vi} \left[\alpha_{vi} \cdot \left(e^{-\frac{t-\tau_0}{\alpha_{vi}}} - e^{-\frac{t-\tau_1}{\alpha_{vi}}} \right) + (\tau_1 - \tau_0) \cdot e^{-\frac{t-\tau_1}{\alpha_{vi}}} \right] \right. \\ \left. + \varphi_{f\infty} \cdot \sum_{i=1}^n v_{fi} \left[\alpha_{fi} \cdot \left(e^{-\frac{\tau_0}{\alpha_{fi}}} - e^{-\frac{\tau_1}{\alpha_{fi}}} \right) - (\tau_1 - \tau_0) \cdot e^{-\frac{\tau_1}{\alpha_{fi}}} \right] \right\} \quad (3-68) \end{aligned}$$

Durch Überlagern von Teillastfällen (Einfluß mehrerer Viertelwellen), wie dies von Rostásy und Alda [74] durchgeführt wurde, lassen sich die Unstetigkeiten an den Knickpunkten der vorgegebenen Spannungsdreiecksfunktion beseitigen. Wegen der Translationsinvarianz der verzögert-elastischen Verformung (keine Alterung) läßt sich für den Anteil $\varepsilon_v(t)$ an einem beliebigen Zeitpunkt τ_n , der aber ein ganzzahliges Vielfaches von $T_p/4$ sein muß, eine Rekursionsformel herleiten, in der alle Verformungsanteile infolge der bis dahin verflossenen Viertelwellen enthalten sind:

$$\varepsilon_v(\tau_{n+1}) = \frac{4 \cdot \Delta \sigma}{E \cdot T_p} \cdot \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} \varphi_v(t-\tau) d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_n} \varphi_v(t-\tau) d\tau \right\} - \sum_{i=1}^n 2 \cdot \varepsilon_v(\tau_i) + \varepsilon_v(\tau_n) \quad (3-69)$$

Das Integral $\int_{\tau_0}^{\tau_n}$ stört hier nicht, da es bereits zur Ermittlung von $\varepsilon_v(\tau_n)$ berechnet wurde.

Wenn lediglich die verzögert-elastische Dehnung an einem Zeitpunkt ermittelt werden soll, können unmittelbar die Formeln aus [74] benutzt werden.

Für den Fließanteil $\varepsilon_f(t)$ erhält man eine bedeutend einfachere Rekursionsformel, da die Spannungsgeschichte in äquidistante Spannungsblöcke zerlegt werden kann. Wählt man als Zeitintervall $T_p/4$, so ergibt sich die Fließverformung durch Akkumulation der Auswirkungen dieser Spannungsblöcke und die Rekursionsformel lautet:

$$\varepsilon_f(\tau_{n+1}) = \varepsilon_f(\tau_n) \pm \left(\frac{4 \cdot \Delta \sigma}{E \cdot T_p} \pm \frac{\sigma(\tau_n)}{E} \right) \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\varphi_f(\tau_{n+1}) - \varphi_f(\tau)) d\tau \quad (3-70)$$

Für eine zyklische Beanspruchung von Spannungsrechteckwellen gemäß Bild 3-32a erniedrigt sich der Rechenaufwand erheblich. Die Formeln ergeben sich analog zur Dreiecksfunktion.

Für eine schwingende Beanspruchung durch sinusförmige Spannungswellen gemäß Bild 3-32b ist die Lösung für die Glg. (3-67) entsprechende Integralgleichung erheblich aufwendiger. Die Formeln für den Fließanteil bzw. den Anteil aus verzögerter Elastizität lauten für die erste Viertelwelle:

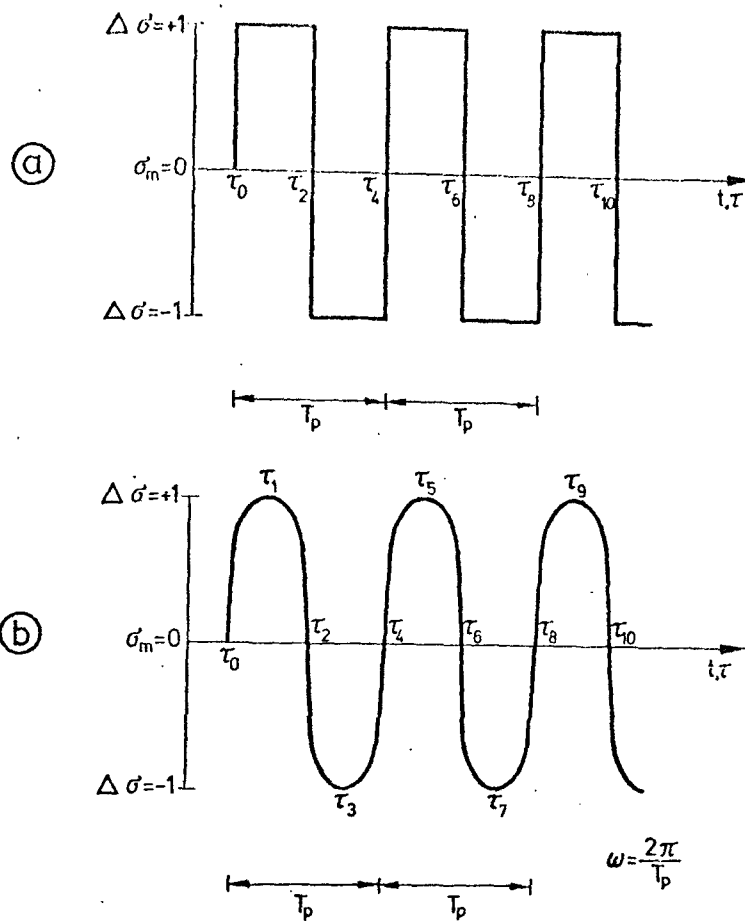


Bild 3-32 Zyklische Beanspruchung durch Spannungsrechteckwellen bzw. sinusförmige Spannungswellen

$$\epsilon_f(t) = \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \varphi_{f0} \cdot \sum_{i=1}^n v_{fi} \left[\frac{\alpha_{fi}^2 \cdot \omega}{1 + \alpha_{fi}^2 \omega^2} \left(\omega e^{-\frac{t_1}{\alpha_{fi}}} + \frac{1}{\alpha_{fi}} \cdot e^{-\frac{t_0}{\alpha_{fi}}} \right) - e^{-\frac{t_1}{\alpha_{fi}}} \right] \quad (3-71)$$

$$\epsilon_v(t) = \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \varphi_{v\infty} \cdot \sum_{i=1}^n v_{vi} \left[\frac{\alpha_{vi}^2 \cdot \omega}{1 + \alpha_{vi}^2 \omega^2} \left(\frac{1}{\alpha_{vi}} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\alpha_{vi}}} - \omega \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\alpha_{vi}}} \right) + 1 \right] \quad (3-72)$$

Die Rekursionsformeln (3-69) und (3-70) gelten entsprechend.

Mit den eingangs dieses Abschnittes eingeführten Bezeichnungen φ_{f0} , d_w , $\varphi_{v\infty}$ und τ_0 soll nun die Auswirkung einer einzelnen Spannungswelle mit dem Summenansatz [47] verfolgt werden. Als Periodendauer wird $T_p = 100$ Tage angenommen. Die Auswertung der Glg. (3-67), (3-68) und (3-69) zeigt Bild 3-33, und zwar sowohl in getrennter Darstellung für den Fließanteil ϵ_f und den Anteil infolge verzögerter Elastizität ϵ_v als auch die Gesamtkriechverformung ϵ_k .

Man sieht, daß am Ende der Spannungswelle der Anteil aus verzögerter Elastizität negativ ist und auch bleibt. Dies bedeutet, daß auch bei beliebiger Lastzyklenanzahl n der Dehnungsanteil infolge verzögerter Elastizität zu Zeitpunkt-

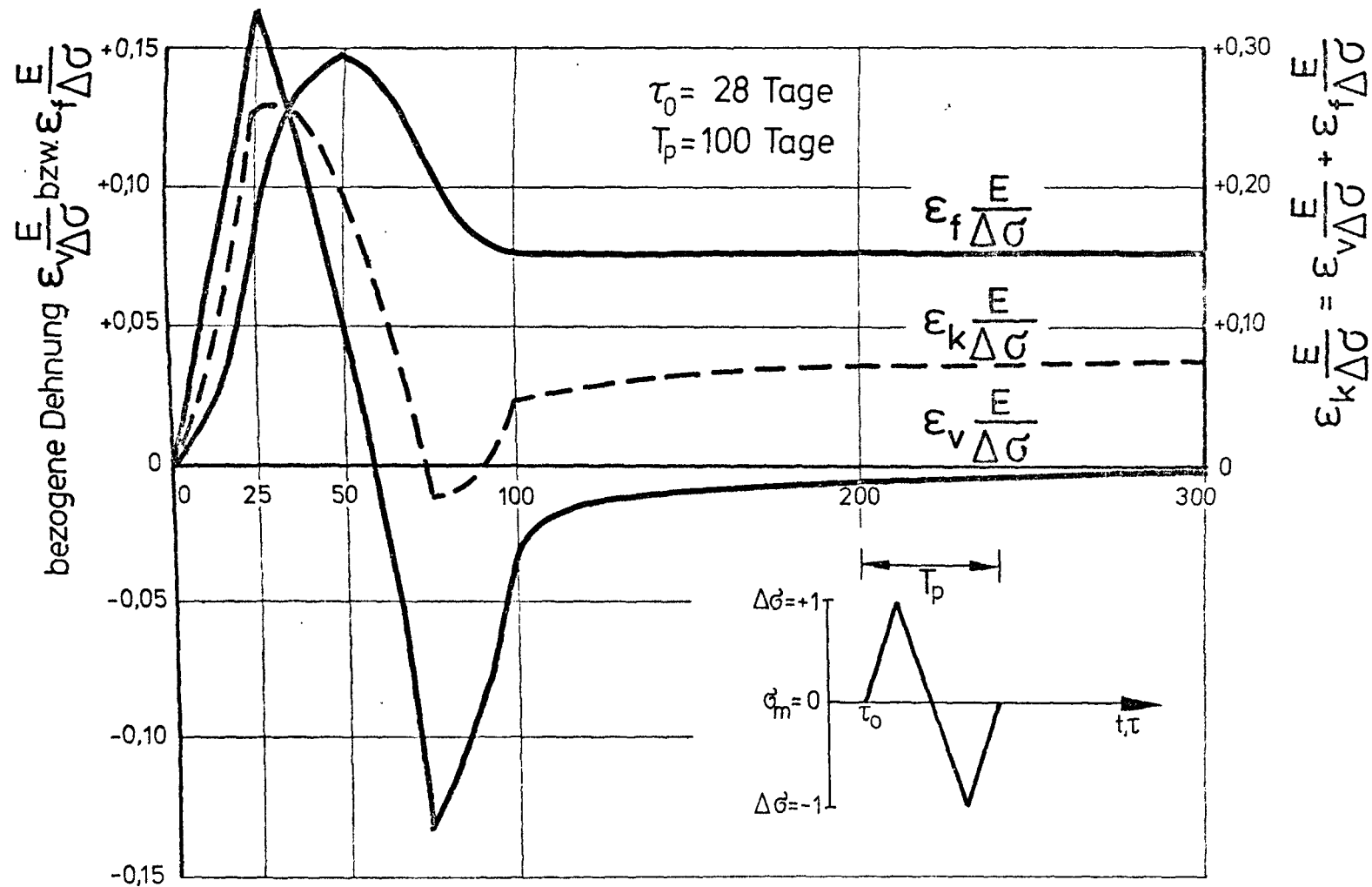


Bild 3-33 Verlauf der zeitabhängigen Dehnungen ε_v , ε_f und ε_k infolge einer Spannungsdreieckswelle. Summenansatz gemäß [47] mit $d_w = 10$ cm, $\varphi_{v\infty} = 0,4$, $\varphi_{fo}^k = 1,0$.

ten, an denen die Belastungsdauer ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer ist, negativ bleiben muß. Damit sagt also der Summenansatz [47] für einen sehr alten Beton, der kein Fließen mehr aufweist, für eine Schwingbeanspruchung gemäß Bild 3-34a geringere Kriechdehnungen bzw. kleinere verzögert-elastische Dehnungen als für rein statisches Kriechen mit $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ voraus, da der Anteil ϵ_v aus der um σ_m pendelnden Spannungszeitfunktion bei Beginn mit steigender Spannung stets negativ ist. In Abhängigkeit von $t - \tau_0$ stellt die $\epsilon_v(t)$ -Kurve eine monoton fallende Funktion dar, wie aus Bild 3-35 zu ersehen ist. Die Kurve für $\sigma = 0$ (σ_m) bei $(t - \tau_0) = T_p \cdot n$ ist negativ und monoton fallend. Würde man die Spannungsamplitude $\Delta\sigma$ vergrößern, so würde dieser Effekt sogar noch verstärkt auftreten. Betrachtet man jedoch eine Spannungsgeschichte gemäß Bild 3-34b, so ist der Kriechanteil aus schwingender Beanspruchung stets positiv und monoton steigend. Dieses überraschende Ergebnis hat zur Folge, daß im allgemeinen Fall (kleine Werte von τ_0) der Kriechanteil infolge schwingender Beanspruchung allein (Bild 3-31c) hinsichtlich Größe und vor allem des Vorzeichens von den Größen ϵ_v und ϵ_f bestimmt wird, die unterschiedliches Vorzeichen haben. Beginnt man zum Zeitpunkt τ_0 mit ansteigender Spannung, so ist an Zeitpunkten eines ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer als Belastungsdauer der Anteil ϵ_v - wie gezeigt - stets negativ, während der Fließanteil ϵ_f stets positiv ist, wie aus Bild 3-33 zu ersehen ist. Das Kriechen infolge Schwingbeanspruchung kann also sowohl größer als auch kleiner als das statische Kriechen unter $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ sein. Be-

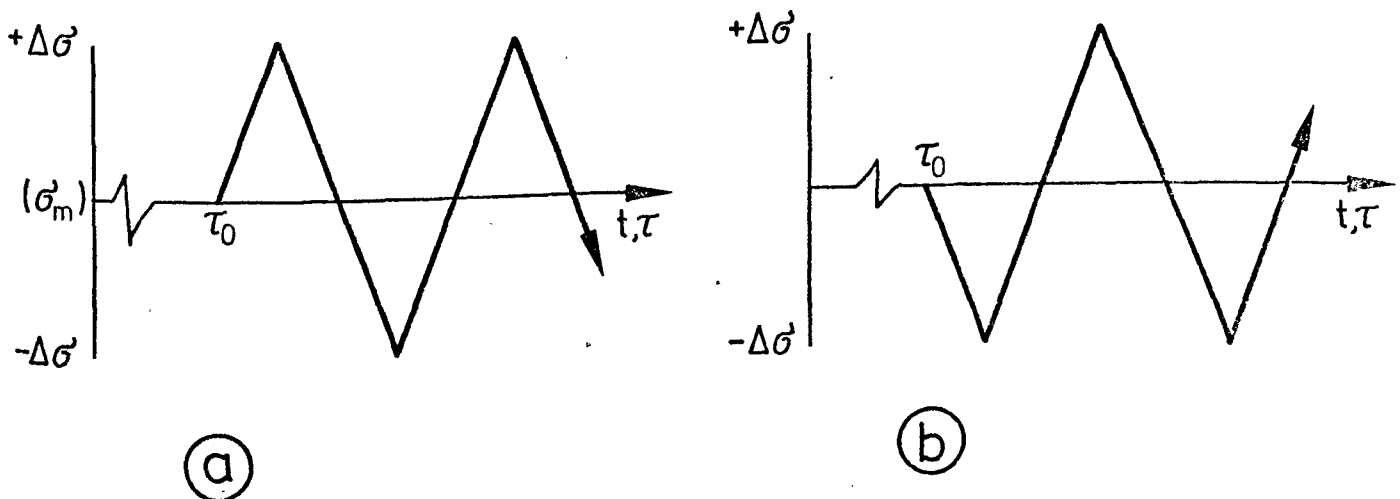


Bild 3-34 Zyklische Spannungsgeschichten mit unterschiedlichem Beginn
(Alter Beton)

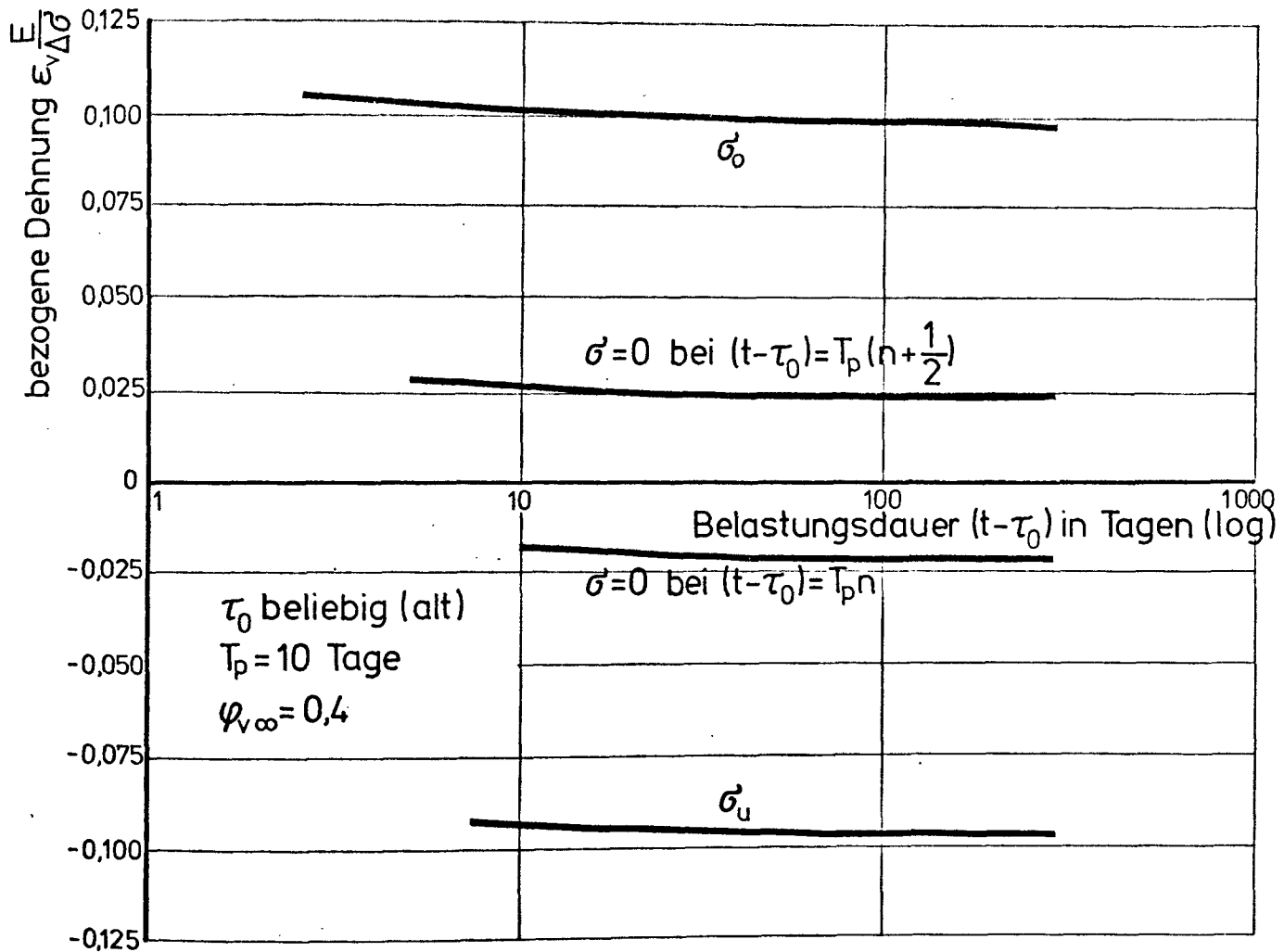


Bild 3-35 Kriechdehnungen infolge dreiecksförmig schwingender Beanspruchung gemäß Bild 3-34a ($\sigma_m = 0$) bei einem alten Beton. Summenansatz gemäß [47]

stimmend hierfür ist das Vorzeichen des Dehnungsanteils infolge Schwingbeanspruchung allein; dieses wiederum wird von dem Vorzeichen des jeweils größeren Anteils ϵ_v bzw. ϵ_f bestimmt.

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit soll dieses wichtige Ergebnis nun am Beispiel einer zyklischen Spannungsrechteckfunktion gemäß Bild 3-36 allgemein dargestellt werden, und zwar sowohl für den Produktansatz als auch für den Summenansatz. Die Rechteckfunktion wird lediglich wegen ihrer besseren Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit gewählt.

Ausgehend vom Sonderfall, daß die Kriechdehnung nur von der verzögert-elastischen Verformung des Summenansatzes, bzw. des Produktansatzes ohne Alterung, bestimmt wird, liefert die Auswertung der Spannungsgeschichte gemäß Bild 3-36

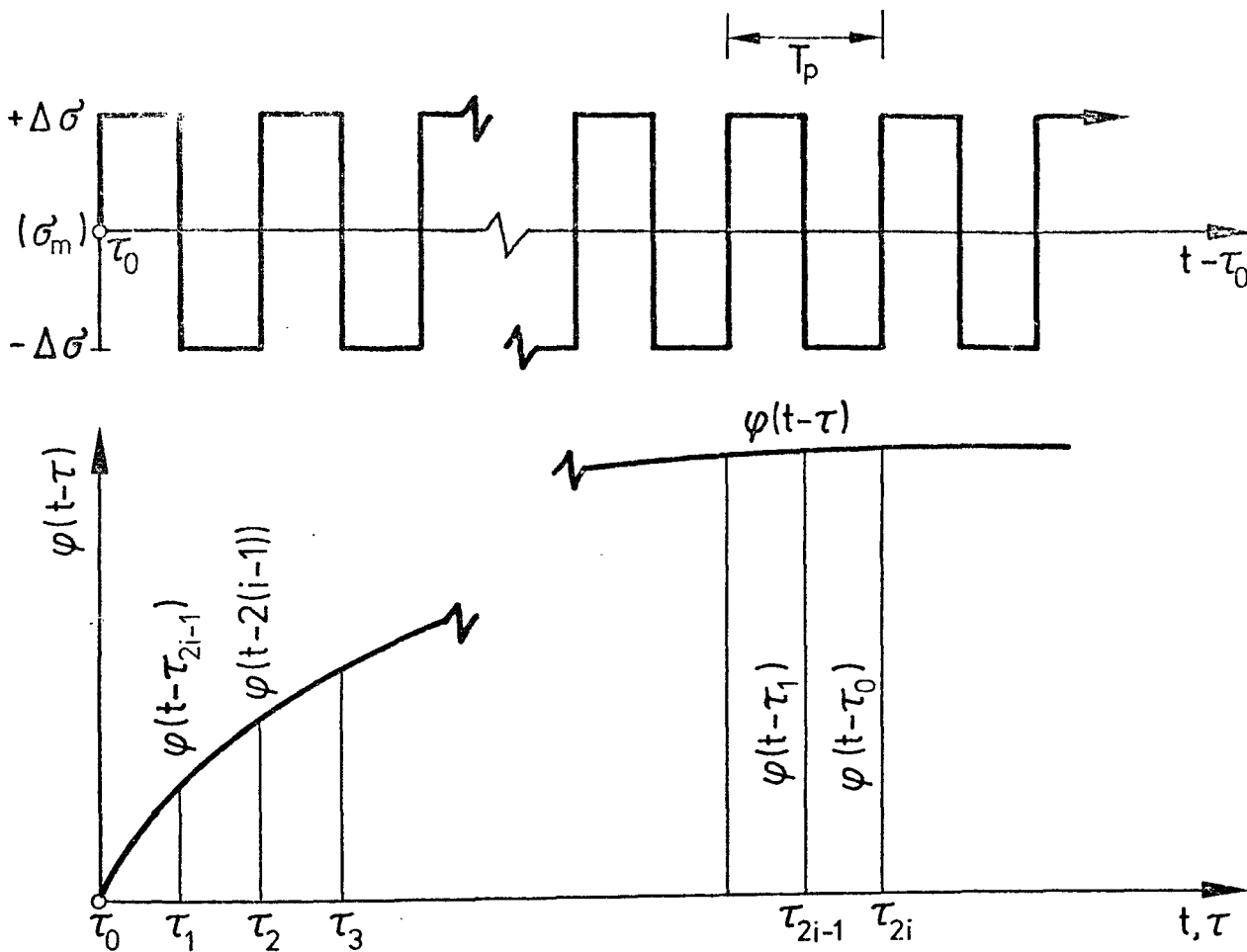


Bild 3-36 Schwingende Beanspruchung durch Rechteckfunktion als differenzierendes Element beim Vergleich von $\sigma = \sigma_m \pm \Delta\sigma$ und $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$

mit $n = (t - \tau_0) / T_p$ (n - ganzzahlig):

$$\epsilon_k(t = \tau_n) = \epsilon_v(t = \tau_n) = \frac{\Delta\sigma}{E} \left[\sum_{i=1}^n (2\varphi(t - \tau_{2i}) - 2\varphi(t - \tau_{2i-1})) + \varphi(t - \tau_0) \right] \quad (3-73)$$

Beim Übergang $T_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) erhält man das Integral:

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t) - \epsilon_v(t) &= \frac{\Delta\sigma}{E} \left[\int_{\tau_0}^t \frac{\partial[\varphi(t-\tau)]}{\partial\tau} d\tau + \varphi(t - \tau_0) \right] \\ &= \frac{\Delta\sigma}{E} [\varphi(t-t) - \varphi(t - \tau_0) + \varphi(t - \tau_0)] = 0 \end{aligned} \quad (3-74)$$

Für $T_p \rightarrow 0$ erhält man also keinen Unterschied zwischen schwingender Beanspruchung und statischer Beanspruchung. Den Maximalunterschied erhält man für $n = \frac{t-\tau_0}{T_p} = 1$ (Eine Welle). Diese maximale Differenz ist bei Beginn mit $+\Delta\sigma$ (s. Bild 3-36) negativ und bei Beginn mit $-\Delta\sigma$ stets positiv und hat die Größe

$$n = 1 : \varepsilon_v(t) = \pm \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \left[\varphi(t-\tau_0) - 2\varphi\left(\frac{t-\tau_0}{2}\right) \right] \quad (3-75)$$

Für den Produktansatz, wie er in den deutschen Vorschriften [33] verwendet wird, geht Glg. (3-73) über in

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \left[2\varphi_\infty(\tau_{2i}) \cdot k(t-\tau_{2i}) - 2\varphi_\infty(\tau_{2i-1}) \cdot k(t-\tau_{2i-1}) + \varphi_\infty(\tau_0) \cdot k(t-\tau_0) \right] \quad (3-76)$$

Das entsprechende Integral lautet ($T_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$):

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \left[\int_{\tau_0}^t \frac{\partial[\varphi_\infty(\tau) \cdot k(t-\tau)]}{\partial \tau} \cdot d\tau + \varphi_\infty(\tau_0) \cdot k(t-\tau_0) \right]$$

bzw.

$$\varepsilon_k(t) = \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \left[\varphi_\infty(t) \cdot k(t-t) - \varphi_\infty(\tau_0) \cdot k(t-\tau_0) + \varphi_\infty(\tau_0) \cdot k(t-\tau_0) \right] = 0 \quad (3-77)$$

Analog zur Theorie der linearen Viskoelastizität mit konstanten Koeffizienten (Glg. (3-74)) erhält man bei der Theorie der linearen Viskoelastizität mit nichtkonstanten Koeffizienten (Produktansatz) ebenfalls keinen Unterschied zwischen schwingender Beanspruchung und statischer Beanspruchung, wenn die Periodendauer sehr klein wird.

Analog zu Glg. (3-75) erhält man für den Produktansatz

$$\varepsilon_k(t) = \pm \frac{\Delta\sigma}{E} \cdot \left[\varphi_\infty(\tau_0) \cdot k(t-\tau_0) - 2\varphi_\infty\left(\frac{t+\tau_0}{2}\right) \cdot k\left(\frac{t-\tau_0}{2}\right) \right] \quad (3-78)$$

als Maximalabweichung einer schwingenden Beanspruchung (Rechteckfunktion) gegenüber einer statischen Beanspruchung mit $\sigma_m = \sigma_0 = \text{const.}$ Hier tritt jedoch der Fall ein, daß der Klammerausdruck in (3-78) je nach Alterungsfunktion sowohl positives als auch negatives Vorzeichen in Abhängigkeit von der Belastungsdauer aufweisen kann. Mit Glg. (3-77) und (3-78) ist also für variable Frequenz der Bereich abgesteckt, in dem sich die Abweichung einer Schwingbeanspruchung von einer statischen Beanspruchung mit $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ hinsichtlich der

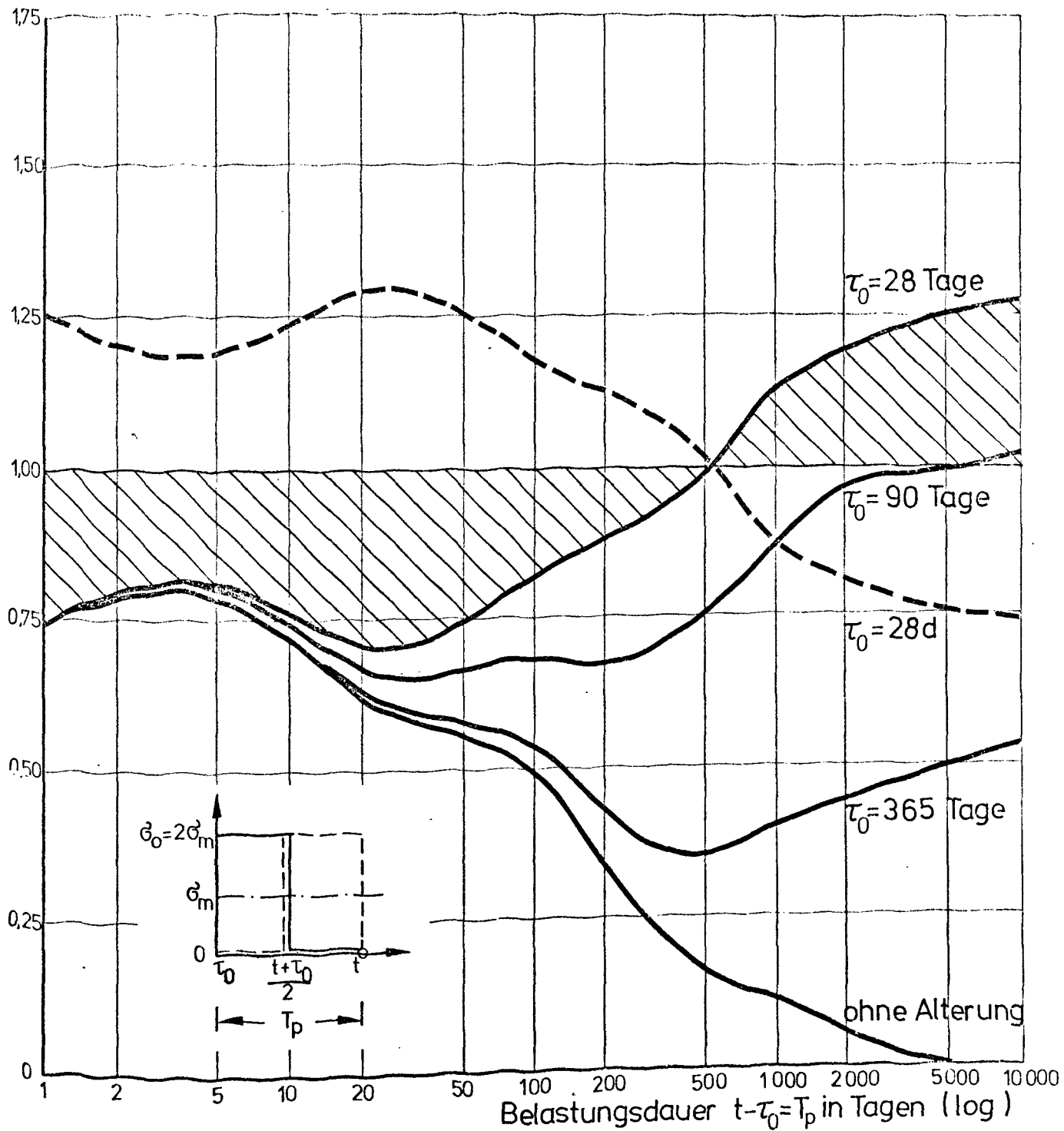


Bild 3-37 Maximale Abweichung der Kriechdehnung bei Schwingbeanspruchung bezogen auf die Kriechdehnung infolge $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ Produktansatz gemäß [33] mit $d_w = 10$ cm, Alterungsverlauf für langsam erhärtenden Zement.

Kriechdehnung zu den Zeitpunkten $t - \tau_0 = n \cdot T_p = n \cdot \frac{1}{f}$ (n - ganzzahlig) bewegen muß. Als Vergleichsgröße wird definiert:

$$\eta(t, \tau) = \frac{\epsilon_k(\sigma(t))}{\epsilon_k(\sigma_m = \text{konst.})} \quad (3-79)$$

Da in den Glg. (3-77) und (3-78) die Spannungsamplitude $\Delta\sigma$ linear eingeht, erhält man die größte Abweichung von der Geraden $\eta = 1$ für den Fall $\sigma_0 = 2 \cdot \Delta\sigma$ bzw. $\sigma_u = 0$. In Bild 3-37 ist der Wert η als Funktion der Periodendauer T_p bzw. der Belastungsdauer $t - \tau_0$ mit τ_0 als Parameter dargestellt. Als Beispiel wurde der Produktansatz gemäß [33] mit $d_w = 10$ cm und dem Alterungsverlauf für langsam erhärtenden Zement gewählt. Beginnt man in der Spannungsgeschichte (Rechteckfunktion) mit σ_0 , so ergeben sich die durchgezogenen Linien. Man erhält für $\tau_0 = 28$ Tage die schraffierte Fläche als Bereich für η . Die Werte von η liegen umso näher bei 1,0, je größer die Frequenz und je kleiner die Spannungsamplitude $\Delta\sigma$ ist. Bis zu einer Belastungsdauer von ca. 500 Tagen ist $\eta < 1$, darüber hinaus ist $\eta > 1$, da in Glg. (3-78) ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Erfolgt die Erstbelastung später (größere τ_0 -Werte), so findet dieser Vorzeichenwechsel nicht mehr statt, da der Einfluß der Alterungsfunktion abnimmt. Wird keine Alterung angesetzt, so wird $\eta = 0$ für große Werte von $t - \tau_0$. Dies entspricht dem erwarteten Ergebnis, daß zum Zeitpunkt $\frac{t + \tau_0}{2}$ der Kriechendwert infolge σ_0 bereits erreicht ist und zum Zeitpunkt t wegen der Nichtalterung des Betons volle Kriecherholung eingetreten ist.

Beginnt man die Spannungsgeschichte mit σ_u , so ergibt sich die an der Achse $\eta = 1$ gespiegelte Kurve für $\tau_0 = 28$ d (gestrichelte Kurve). Es ergibt sich das überraschende Ergebnis, daß der Produktansatz bei einer Spannungsgeschichte gemäß einer Rechteckfunktion und Beginn mit σ_0 bis zu einer Belastungsdauer von $t - \tau_0 \approx 500$ Tage ($\tau_0 \geq 28$ Tage) am Ende eines beliebigen Lastwechsels geringeres Kriechen voraussagt als bei Beginn mit σ_u . Dieser Effekt ist umso ausgeprägter, je geringer die Alterungsgeschwindigkeit ist.

Wie sich der Wert η bei gleicher Belastungsdauer mit steigender Frequenz (wachsender Lastzyklenanzahl), ausgehend vom Maximalwert des Bildes 3-37, dem Wert $\eta = 1$ nähert, zeigt Bild 3-38. Als Beispiel für den Produktansatz gemäß [33] wurden wiederum $d_w = 10$ cm, Alterungsverlauf für langsam erhärtenden Zement und $\tau_0 = 28$ Tage gewählt. Die Auswertung mit dem in Abschnitt 6. beschriebenen Programm zeigt für zwei ausgewählte Werte $t - \tau_0$ die Bestätigung

von Bild 3-37 bzw. den Glg. (3-77) und (3-78). Beginnt die Spannungsgeschichte (Rechteckfunktion) mit σ_o , so geht $\eta(n)$ für wachsendes n monoton steigend gegen 1,0 für $t-\tau_0 < 500$ Tage und monoton fallend gegen 1,0 für $t-\tau_0 > 500$ Tage. Beginnt die Spannungsgeschichte mit σ_u , so ergibt sich die umgekehrte Aussage. Für das gewählte Beispiel zeigt sich, daß für $t-\tau_0 = 28$ Tage bei Frequenzen größer als etwa $f = 2 \cdot 10^{-5}$ Hz kein Unterschied zwischen Schwingkriechen (Rechteckfunktion) und statischem Kriechen mit $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ auftritt. Mit zunehmender Belastungsdauer $t-\tau_0$ sinkt diese Frequenzgrenze ab.

Als Vergleich zum Produktansatz soll auch der Summenansatz gemäß [47] am Beispiel einer Spannungsgeschichte gemäß einer Rechteckfunktion untersucht werden. Die Vergleichsgröße η ist hier wie folgt definiert:

$$\eta(t, \tau) = \frac{\epsilon_v(\sigma(t)) + \epsilon_f(\sigma(t))}{\epsilon_v(\sigma_m = \text{konst.}) + \epsilon_f(\sigma_m = \text{konst.})} \quad (3-80)$$

Bei der Bereichsuntersuchung für den Fließanteil infolge der Schwingkomponente (s. Bild 3-36) ergibt sich für $T_p \rightarrow 0$ analog zu Glg. (3-74):

$$\epsilon_f(t) = \frac{\Delta \sigma}{E} \cdot \left[- \int_{\tau_0}^t \frac{\partial[\varphi_f(\tau)]}{\partial \tau} \cdot d\tau - \varphi_f(\tau_0) + \varphi_f(t) \right] = 0 \quad (3-81)$$

Als Maximalgröße erhält man für $n = 1$:

$$\epsilon_f(t) = \pm \frac{\Delta \sigma}{E} \cdot \left[2 \varphi_f\left(\frac{t+\tau_0}{2}\right) - \varphi_f(t) - \varphi_f(\tau_0) \right] \quad (3-82)$$

Anders als bei der Ermittlung von η für den Produktansatz sind beim Summenansatz die unterschiedlichen Endwerte $\varphi_{v\infty}$ für die verzögerte Elastizität und φ_{fo} für die Fließverformung zu berücksichtigen. Bild 3-39 zeigt die dem Produktansatz (Bild 3-37) entsprechende Auswertung. Für den Bereich, in dem bei variierter Frequenz und Spannungsamplitude $\Delta \sigma$ der Wert η liegen muß, ergibt sich bei $\tau_0 = 28$ die schraffierte Fläche bei einem geringen Fließanteil ($\varphi_{fo} = 0,8$). In der Tendenz zeigt sich also ähnliches Verhalten wie beim Produktansatz, auch hinsichtlich der Abhängigkeit von τ_0 . Als wesentlicher Unterschied zwischen Summenansatz und Produktansatz zeigt sich, daß beim ersteren die η -Werte stärker von 1,0 abweichen, vor allem dann, wenn der Fließanteil besonders groß ist.

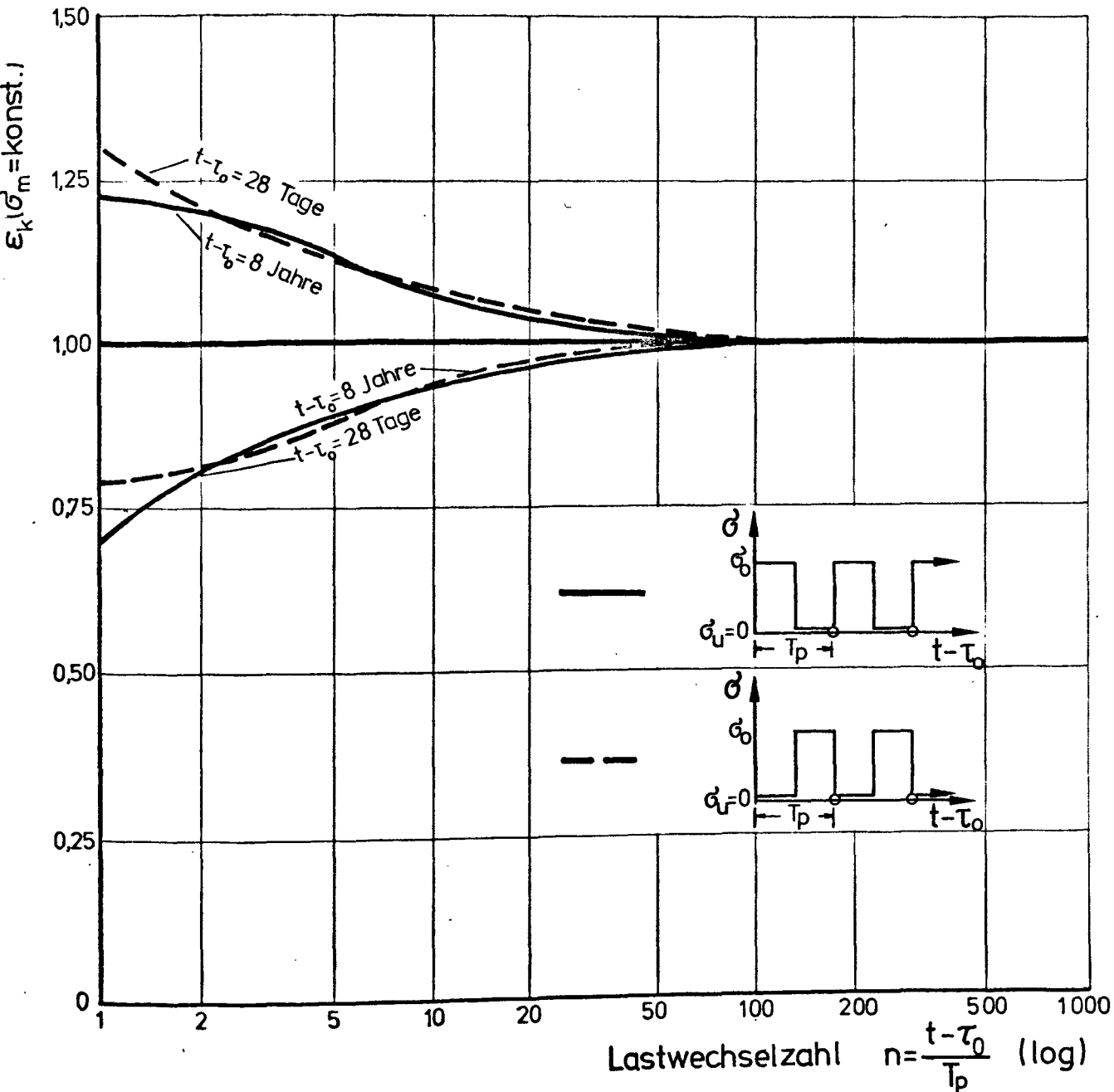


Bild 3-38 Änderung des η -Wertes in Abhängigkeit von der Frequenz (Lastwechselanzahl) für verschiedene Belastungsdauern. Produktansatz gemäß [33] mit $d_w = 10 \text{ cm}$, Alterungsverlauf für langsam erhärtenden Zement, $\tau_0 = 28 \text{ Tage}$.

Die am Beispiel der Spannungsgeschichte gemäß einer Rechteckfunktion gewonnenen Erkenntnisse gelten im Prinzip auch für Dreieckfunktion und Sinusfunktion gemäß Bild 3-31 bzw. 3-32. In den Summenformeln Glg. (3-73) bzw. (3-76) sind dann lediglich die Summanden Integrale.

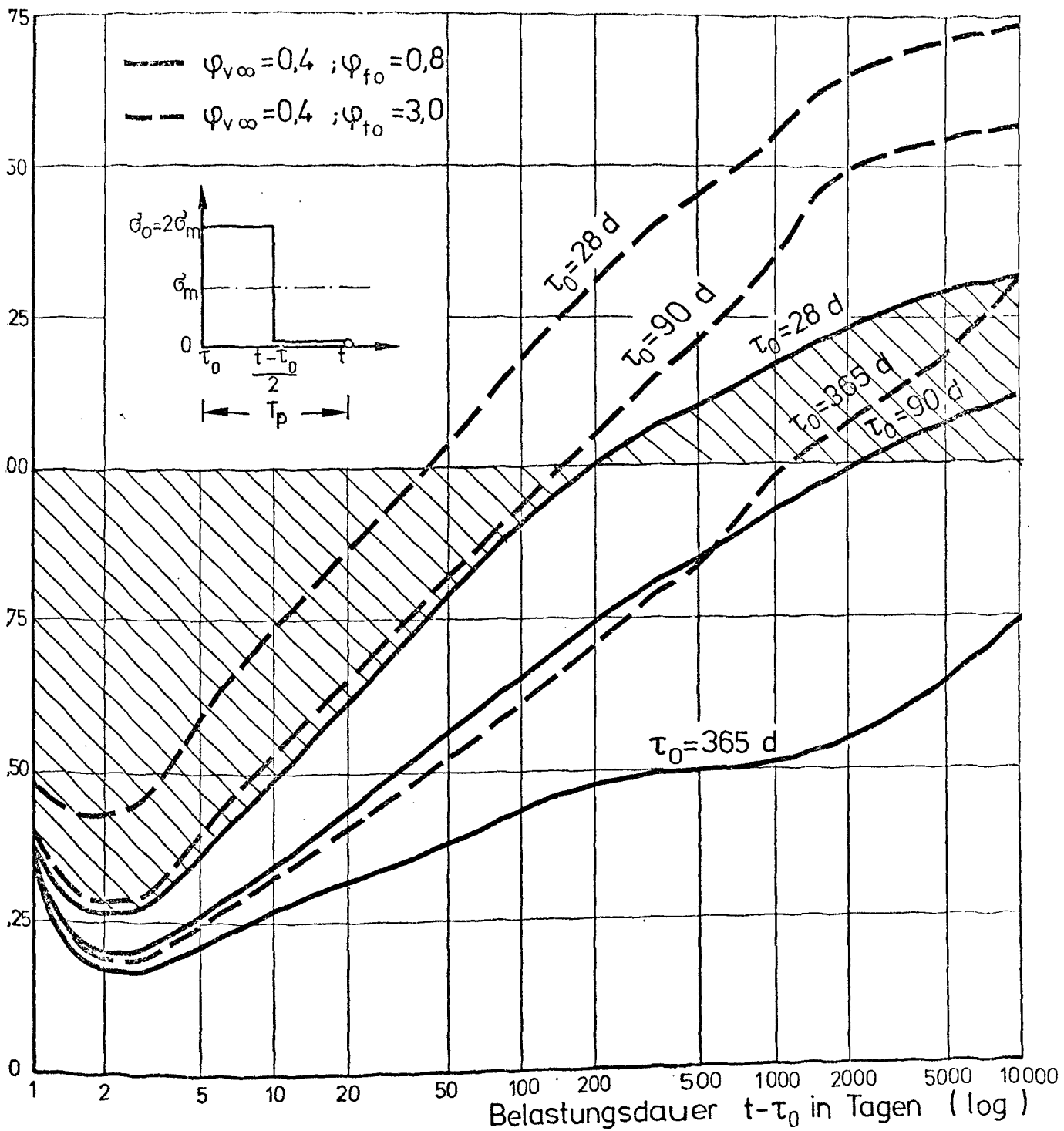


Bild 3-39 Maximale Abweichung der Kriechdehnung bei Schwingbeanspruchung bezogen auf die Kriechdehnung infolge $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ Summenansatz gemäß [47] mit $d_w = 10 \text{ cm}$.

Zusammenfassend läßt sich über die Anwendung der bisherigen Theorien auf eine zyklische Spannungsgeschichte folgendes feststellen:

Die Unterschiede zwischen Schwingkriechdehnung und Kriechen unter ruhender Belastung mit $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ sind umso ausgeprägter,

- I je kleiner die Frequenz $f = \frac{1}{T_p}$ ist.
- II je größer die Spannungsamplitude $\sigma_a = \Delta\sigma$ ist.
- III je später der Belastungsbeginn liegt.
- IV je schwächer die Alterungsfunktion (Produktansatz) ausgeprägt ist.
- V je größer der Fließanteil am Gesamtkriechen ist (Summenansatz).

Die überraschendste Erkenntnis ist hierbei wohl Punkt I. Sie wurde bereits in [74] vermutet und steht im Widerspruch zu der Vermutung von Bažant [75], daß eine schwingende Beanspruchung eine Raffung anelastischer und viskoser Dehnwege zur Folge hat. Es scheint vielmehr so zu sein, daß eine schwingende Beanspruchung im Frequenzbereich größer als etwa 10^{-4} Hz von der Dehnungsantwort auf eine konstante Spannung $\sigma_m = \sigma_k = \text{const.}$ sehr gut beschrieben werden kann.

Das Vorzeichen für den Dehnungsunterschied zwischen Schwingkriechen und statischem Kriechen wird beim Summenansatz von den Gewichten der Anteile ϵ_v und ϵ_f und beim Produktansatz von der Alterungsfunktion bestimmt. Die Vergleichsgröße η kann also je nach Parametervorgabe größer oder kleiner als 1,0 sein.

4. KRIECHVERSUCHE MIT ZYKLISCHER SPANNUNGSGESCHICHTE

Verglichen mit der Zahl von Dauerstandversuchen (Statischer Kriechversuch) gibt es nur wenige Versuche unter zyklischer Belastung.

Im folgenden sollen in aller Kürze die wichtigsten Versuche und deren Ergebnisse aufgeführt werden, auch wenn sie außerhalb des Frequenzbereichs liegen, der in der vorliegenden Arbeit betrachtet werden soll.

Bereits 1931 [76] beobachtete Probst das Verhalten von Beton unter rasch alternierender Schwellbeanspruchung (Frequenz $f \approx 1$ Hz). Die Belastungsdauer betrug maximal etwa 7 Tage. Die angelegten Spannungen schwankten zwischen einer niedrigen Unterspannung und einer Oberspannung, die maximal 47 % der Druckfestigkeit betrug. Probst stellte fest, daß die Spannungs-Dehnungs-Beziehung bereits nach wenigen Lastzyklen zu einer Geraden wird. Der Elastizitätsmodul nahm während der Belastungsdauer zwischen 12 und 22 % ab, war jedoch gegen Versuchsende annähernd konstant. Hinsichtlich der Kriechdehnungen wurden ähnliche Ergebnisse erhalten wie im statischen Kriechversuch. Die Kriechgeschwindigkeit nahm mit zunehmender Belastungsdauer ab, die Kriechdehnung schien einem Grenzwert zuzustreben. In weiteren Versuchen stellte Probst [77] außerdem einen sehr starken Einfluß des Betonalters bei Belastungsbeginn auf die Kriechdehnung fest. Im gleichen Versuchsprogramm wurden zwei Balken einer unterschiedlichen Belastungsgeschichte unterzogen. Bei einem Balken wurden 1,1 Millionen Lastzyklen mit einer Frequenz von 1,5 Hz (Belastungsdauer ca. 8,5 Tage) durchgeführt. Anschließend wurde die Oberspannung für weitere 12 Tage konstant gehalten. Während dieser Zeit wurde ein Anstieg der Kriechdehnungen beobachtet. Bei dem zweiten Balken wurde zuerst 23 Tage lang die Oberspannung der nachfolgenden zyklischen Beanspruchung (Dauer: ca. 2 Tage) konstant gehalten. Während der Schwelllastphase wurde kein Zuwachs der Kriechdehnungen beobachtet. Nachdem jedoch anschließend die Frequenz auf 0,4 Hz erniedrigt wurde, zeigte sich eine erneute Zunahme der Kriechdehnungen. Daraus kann gefolgert werden, daß eine Frequenzerniedrigung unter bestimmten Verhältnissen zu einem erhöhten Kriechen führt.

Zu einem ähnlichen Ergebnis wie Probst kam Le Camus [78]. Er unterzog Betonproben einem 1000 Tage langen statischen Kriechen mit $\sigma_k = 10$ bzw. 5 N/mm^2 . Nach einer anschließenden Entlastungsperiode wurden die gleichen Proben

3 Millionen Lastzyklen unterzogen. Der Kriechdehnungszuwachs während der zyklischen Belastung betrug 6 % der Kriechverformung des statischen Kriechversuchteiles. In weiteren Versuchen mit zyklischer Belastung ($f = 8,3 \text{ Hz}$) fand jedoch Le Camus, daß die daraus resultierende Kriechdehnung bei gleicher Belastungsdauer wesentlich größer war als diejenige in statischen Kriechversuchen unter $\sigma_k = \sigma_o = \text{const.}$ Dies läuft in der Interpretation darauf hinaus, daß bei sehr schnell schwingenden Lasten ein "Zeitraffereffekt" auftritt, dessen Ursachen nicht ganz klar sind. L'Hermite [79] vermutete, daß durch die wiederholte Belastung das als eine der Ursachen des Kriechens angesehene Auspressen von Wasser ("Seepage"-Theorie) aus der Zementsteinstruktur durch einen "Pumpeffekt" beschleunigt wird. Auf diese Weise würde das Kriechen, insbesondere dessen Anteil infolge Trocknung [9], vergrößert werden. Neville [6] vermutete als Ursache für das größere Kriechen unter Schwellbelastung die größere Energiezufuhr gegenüber dem statischen Kriechen.

Gvozdev [80] fand eine Linearabhängigkeit zwischen der Oberspannung und der Anzahl der Lastwechsel, sofern die Oberspannung $\sigma_{o/\beta} = \bar{\sigma}_o < 0,5$ ist. Er stellte unter sonst gleichen Bedingungen fest, daß eine schwingende Belastung einen größeren Anteil von irreversiblen Dehnungen hervorruft als eine statische Belastung.

Bei den von Davis und Davis [81] durchgeführten Schwingkriechversuchen betrug der Frequenzbereich $f = 1,9$ bis $58 \times 10^{-7} \text{ Hz}$. Die Spannungsgeschichte entsprach einer Rechteckfunktion mit relativ geringer Oberspannung ($\sigma_o = 5,6 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_u = 0,05 \cdot \sigma_o = 0,3 \text{ N/mm}^2$). Analog zu statischen Versuchen wurde festgestellt, daß die Kriechgeschwindigkeit mit wachsender Lastwechselanzahl (zunehmender Belastungsdauer) abnimmt. Die Kriechgeschwindigkeit war unter der Oberspannung σ_o stets größer als unter der Unterspannung (annähernd Entlastung).

Bei Luftlagerung der Prüfkörper war der Unterschied zwischen Kriecherholung und Kriechen im jeweiligen Lastzyklus größer als bei Wasserlagerung.

Bernhardt [82] wählte bei seinen Versuchen die in Bild 4-1 dargestellte zyklische Belastungsgeschichte. Er stellte fest, daß die Kriechdehnungen dieser zyklischen Spannungsgeschichte größer sind als diejenigen, die sich bei der Spannung σ_m als konstanter Kriechspannung ergeben. Nach Bernhardt kann das Schwingkriechen durch folgende konstante Spannung σ_B beschrieben werden:

$$\sigma_B = \sigma_m + \frac{F_1}{T_p} \quad (4-1)$$

Hierin ist σ_m diejenige Spannung, die durch Flächenausgleich $F_1 = F_2$ erhalten wird.

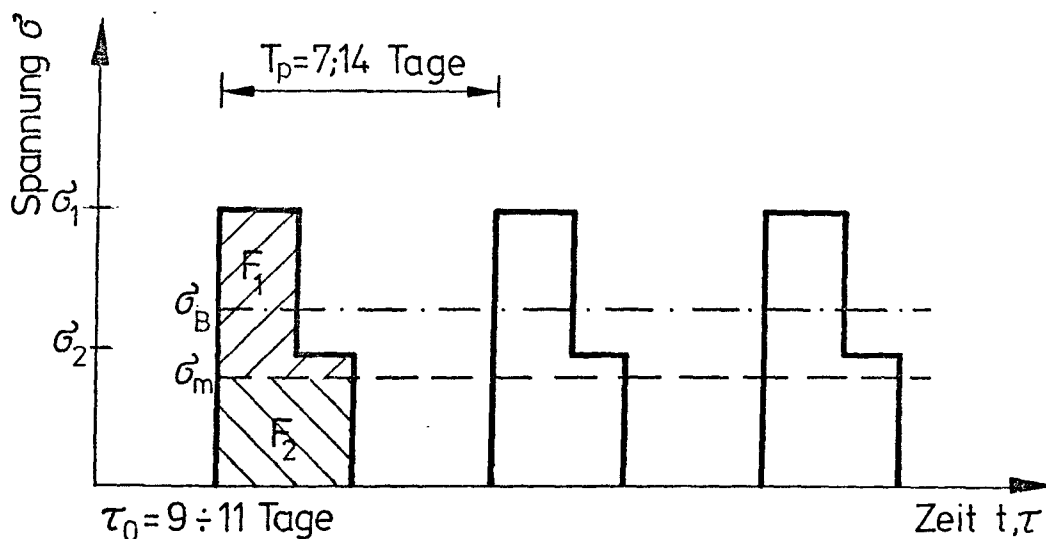


Bild 4-1 Zyklische Spannungsgeschichte in den Versuchen von Bernhardt [82]

Gaede [83] führte umfangreiche Versuche über das Festigkeits- und Verformungsverhalten von Beton bei Druckschwellbeanspruchung durch. Sie wurden mit hoher Frequenz $f = 11,1$ Hz gefahren. Die angelegte Oberspannung lag jedoch mit $\bar{\sigma}_0 = 0,6$ bis $0,9$ so hoch, daß bereits Gefügezerstörungen (Mikrorisse) auftreten mußten. Gaede gab für die irreversible Verformung folgende empirische Formel an:

$$\epsilon_{bl} = C \cdot \frac{\sigma_e}{K} \cdot \frac{10^5}{\tan \beta} \cdot (N \cdot 10^5)^r \quad [\text{‰}] \quad (4-2)$$

- mit K - Prismendruckfestigkeit
 σ_0 - Oberspannung
 $\tan \beta$ - Elastizitätsmodul als Sekantenmodul zwischen $\sigma = 0$ und σ_0
 N - Lastwechselzahl
 C, r - Konstanten in Abhängigkeit vom Verhältnis σ_u / σ_0

Mehmel und Kern [84] führten ebenfalls Druckschwellversuche mit relativ hoher Frequenz von $f = 6,3 \text{ Hz}$ und dem relativ hohen Belastungsgrad von $\bar{\sigma} = 0,4$ bis $0,8$ durch. Die Kriechverformungen ergaben sich unter Schwellbelastung - bezogen auf σ_m - größer als die entsprechenden Verformungen unter Dauerstandbelastung. Bei den schwellbeanspruchten Proben konnte kein nennenswerter Einfluß der Schwingbreite festgestellt werden.

Sowohl bei den Versuchen von Gaede als auch bei denen von Mehmel und Kern wurde zu Beginn der Schwellbelastung, ausgehend von der Oberspannung σ_o , allmählich auf die Unterspannung abgeschwungen. Die für den Einschwingvorgang erforderliche Zeit, d. h. also bis der Istwert von σ_u erreicht ist, beträgt rd. 15 Minuten. Insbesondere bei höherem Belastungsgrad $\bar{\sigma}$ kann dieser Einfluß einer anfänglich oberhalb σ_m liegenden Beanspruchung bei einem Vergleich von Schwingkriechen und statischem Kriechen nicht mehr vernachlässigt werden, da er praktisch eine Erhöhung der Mittelspannung zu Versuchsbeginn bedeutet, zu einem Zeitpunkt also, an dem die Kriechgeschwindigkeit ein Maximum ist. Außerdem betrug die Gesamtbelastungsdauer lediglich 3,6 Tage.

Auf den Versuchsergebnissen von Gaede [83] und Mehmel und Kern [84] baut eine theoretische Arbeit von Badawy auf [86]. Badawy geht von einem rheologischen Modell gemäß Bild 4-2 aus, das aus einer parallel geschalteten Dreierkombination - St.-Venant'scher Körper, Hooke'sche Feder und Maxwell-Körper - und einer dazu in Reihe geschalteten Hooke'schen Feder besteht. Mit Hilfe einer Mehrfachreihenschaltung des obigen Modells entsprechend einer Verteilungs-

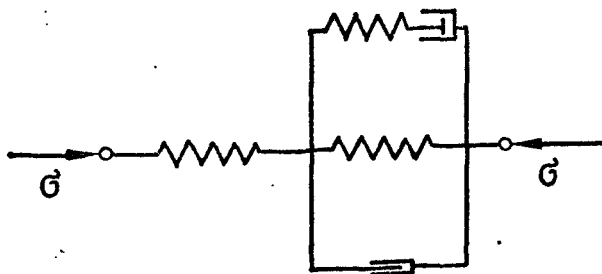


Bild 4-2 Rheologisches Modell nach Badawy [86]

funktion gelangt Badawy zu den folgenden Formeln für die Beschreibung

der Belastungslinie:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - C\sigma^2 + K \cdot \frac{\sigma_0}{\beta_c} \cdot \left[1 - e^{-\left\{ a(N-1) + b\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right\} \cdot \frac{\sigma_0^2}{2}} \cdot e^{-\left\{ a + \frac{b}{N(N+1)} \right\} \cdot \frac{\sigma^2}{2}} \right] \quad (4-3)$$

der Entlastungslinie:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + R\sigma(\sigma_0 - \sigma) - C\sigma^2 + K \cdot \frac{\sigma_0}{\beta_c} \cdot \left[1 - e^{-\left\{ aN + b\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) \right\} \cdot \frac{\sigma_0^2}{2}} \right] \quad (4-4)$$

des Kriechens unter Wechselspannung:

$$\varepsilon_{bl}^N = K \cdot \frac{\sigma_0}{\beta_c} \cdot \left[1 - e^{-\left\{ a(N-1) + b\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right\} \cdot \frac{\sigma_0^2}{2}} \right] \quad (4-5)$$

Hierin sind a , b , K , C , R Materialkonstanten, die experimentell in Abhängigkeit von der Betongüte zu bestimmen sind. Die Ansätze (4-3) bis (4-5) sind im Hinblick auf die Zielsetzung dieser Arbeit nicht brauchbar, da die oben erwähnten Materialkonstanten bei niedrigen Frequenzen zeitabhängig vom Betonalter anzusetzen sind. Über diese Abhängigkeit liegen jedoch keine Versuchsergebnisse vor. Stoffmechanisch führt Badawy das Kriechen auf zusammenbrechende und sich schließende Hohlräume zurück. Wenn alle irreversibel zusammenbrechenden Hohlräume geschlossen sind, ist das Kriechen abgeschlossen. Die Formeln (4-3) bis (4-5) gelten jedoch nur für eine bestimmte Belastungsdauer, da der Wert K als Grenzwert den Versuchen von Mehmehl und Kern [84] für $2,0 \cdot 10^6$ Lastzyklen (Belastungsdauer $\sim 3,7$ Tage) entnommen wurde.

Whaley und Neville [85] führten bei hoher Frequenz von $f = 9,8$ Hz Druckschwellversuche unter Variation der Schwingbreite und der Mittelspannung durch. Sie stellten fest, daß eine zyklische Schwellbelastung, verglichen mit einer ruhenden (statischen) Beanspruchung die inelastische Verformung des Betons beschleunigt. Das Gesamtkriechen unter zyklischer Beanspruchung setzt sich nach Neville und Whaley zusammen aus einer Mittelspannungskomponente und einer Komponente, die von der Schwingbreite abhängt:

$$\epsilon_k = a \cdot \sigma_m (1 + b \Delta) (t - \tau_0)^{1/3}$$

(4-6)

mit $\Delta = 2\Delta\sigma = \sigma_o - \sigma_u$

a, b - Konstante

In Bild 4-3, das [85] entnommen wurde, ist ein wichtiges Ergebnis aus den Versuchen von Neville und Whaley zu erkennen. In doppeltlogarithmischer Darstellung ist die Abhängigkeit der Kriechdehnung bei zyklischer Belastung von der

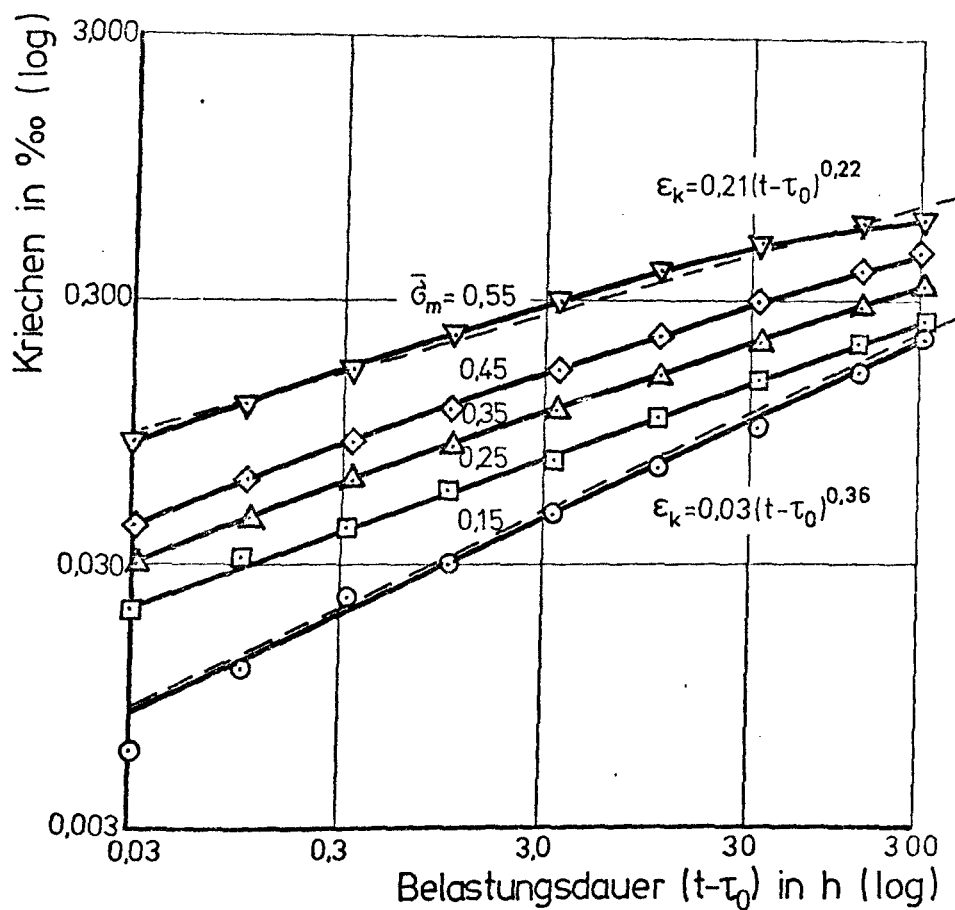


Bild 4-3 Einfluß der Mittelspannung auf das Kriechen bei einer Schwingbreite $\Delta = \frac{2\Delta\sigma}{\beta} = 0,2$ gemäß [85]

Belastungsdauer $t - \tau_0$ dargestellt. Die Schwingbreite Δ wurde bei variiertem σ_m -Wert konstant gehalten. Die Kriechkurven können offensichtlich in der gewählten grafischen Darstellung durch Geraden dargestellt werden, die mathematisch der Funktion

$$\epsilon_k(t) = A(t - \tau_0)^B$$

(4-7)

entsprechen. Approximiert man nun z. B. die Verläufe für $\sigma_m = 0,55$ bzw. $0,15$, so ergeben sich die in Bild 4-3 angegebenen Funktionen:

$$\bar{\sigma}_m = 0,55 : \epsilon_k(t) = 0,21(t - \tau_0)^{0,22} \quad (4-8)$$

$$\bar{\sigma}_m = 0,15 : \epsilon_k(t) = 0,03(t - \tau_0)^{0,36} \quad (4-9)$$

In diesen Gleichungen steckt nun außer der Zeitabhängigkeit noch versteckt der Einfluß der Spannung σ_m , ausgedrückt durch den Belastungsgrad $\bar{\sigma}_m = \frac{\sigma_m}{\beta_c}$. Geht man näherungsweise von einer Linearität des E-Moduls aus, kann man die Glg. (4-8) und (4-9) umformen in:

$$\bar{\sigma}_m = 0,55 : \bar{\varphi}(t) = \frac{\epsilon_k(t)}{\bar{\sigma}_m} = 0,38(t - \tau_0)^{0,22} \quad (4-8a)$$

$$\bar{\sigma}_m = 0,15 : \bar{\varphi}(t) = \frac{\epsilon_k(t)}{\bar{\sigma}_m} = 0,20(t - \tau_0)^{0,36} \quad (4-9a)$$

Man erkennt, daß sich die Spannungsnichtlinearität sowohl im Wert von A als auch von B der Glg. (4-7) zeigt, in den Kriechkurven läßt sich also nicht die Zeit- und Spannungsabhängigkeit separieren, z. B. in der Form

$$\bar{\varphi}(t) = f(\bar{\sigma}_m) \cdot g(t - \tau_0) \quad (4-10)$$

Glg. (4-10) würde bedeuten, daß die Kriechkurven, welche für verschiedene konstante Spannungen erhalten werden, durch Multiplikation mit einem zeitunabhängigen Faktor ineinander übergeführt werden können.

Für statisches Kriechen erhielten Neville und Whaley ähnliche Ergebnisse hinsichtlich der Nichtlinearität von Kriechdehnung und Spannung.

Von Mathur [87], Tsui [88], Mickleborough [89] und Kwong [90] wurden umfangreiche Versuche unter statischer Belastung und schwingender Belastung durchgeführt. Als Belastungsgeschichte in den Schwingkriechversuchen wurden eine sinusförmige Belastung mit hoher Frequenz ($f = 25$ Hz) sowie eine rechteckförmige Belastung mit geringer Frequenz ($f = 5,6 \cdot 10^{-6}$ Hz) durchgeführt. Das Betonalter bei Belastungsbeginn betrug zumeist 28 Tage (in einer Versuchsserie von Kwong [90] betrug $\tau_0 = 58$ Tage). Die Belastungsdauer betrug 30 bzw. 15 Tage. Als Probekörper wurden Zylinder $\varnothing 7,9$ cm, $h = 30,5$ cm verwendet. Die Betone entsprachen in etwa einem B 15 ([87, 88, 89, Serie C in 90]) bzw. einem

B 35 ([90])). Die Ergebnisse sind widersprüchlich und lassen sich nur schwer interpretieren. Aus der Zusammenfassung der Versuchsergebnisse, die von Suter und Mickleborough [91] durchgeführt wurden, kann man entnehmen, daß die Kriechdehnung im Schwingkriechversuch kleiner als diejenige im statischen Kriechversuch ist. Bei dem von Suter und Mickleborough durchgeführten Vergleich wurden jedoch Ergebnisse des Schwingkriechversuches auf Ergebnisse des statischen Kriechversuches bezogen, bei dem die Kriechspannung gleich der Oberspannung des Schwingkriechversuches war. Reduziert man die Kriechdehnungen des statischen Kriechversuches im Verhältnis σ_m / σ_o , so ergibt der Vergleich von Schwingkriechen und statischem Kriechen, daß das Schwingkriechen bei geringer Frequenz geringfügig größer und bei hoher Frequenz wesentlich größer als das statische Kriechen ausfällt. Zu den Ergebnissen des Schwingkriechens unter hoher Frequenz sind jedoch zwei Anmerkungen zu machen. Zum einen trat eine unvermeidbare Kriechdehnungsvergrößerung während des Einschwingvorganges auf, auf die bereits bei der Deutung der Versuchsergebnisse von Gaede [83] eingegangen wurde. Zum anderen trat während der Schwingbelastung mit hoher Frequenz eine beträchtliche Erniedrigung des E-Moduls im Verlauf der Belastungsdauer auf (im Mittel ca. 20 % bei Versuchsende, bezogen auf den E-Modul bei Belastungsbeginn). Bei den statischen Kriechversuchen und den Schwingkriechversuchen mit geringer Frequenz war hingegen eine geringfügige, von der Belastungsart aber unabhängige Zunahme des E-Moduls zu beobachten. Daraus kann gefolgert werden, daß gewisse strukturelle Veränderungen des Betons bei hohen Frequenzen nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Diese Versuchsergebnisse stimmen mit denjenigen von Gaede [83] bzw. Mehmel und Kern [84] überein, die ebenfalls eine Erniedrigung des E-Moduls im Verlaufe der Belastung bei Schwingkriechversuchen mit hoher Frequenz beobachteten.

In einer Versuchsserie von Kwong [90] wurde die Rechteckspannungsgeschichte bei sonst gleichen Verhältnissen einmal mit σ_u , das andere Mal mit σ_o begonnen. Es zeigte sich, daß das Kriechen im ersteren Fall bedeutend kleiner war (ca. 24 %, bezogen auf das Kriechen bei Beginn mit σ_o).

In den bereits erwähnten unveröffentlichten Münchener Versuchen wurde ebenfalls der Einfluß einer zyklisch wiederholten Belastung untersucht. Als Belastungsgeschichte wurde jeweils eine zyklische Rechteckfunktion gewählt. Die Periodendauer war im Mittel 28 bzw. 56 Tage. Das Erstbelastungsalter τ_0 betrug 7 bzw. 28 Tage. Die Oberspannung betrug etwa 30 bis 36 % der Würfeldruckfestigkeit bei Versuchsbeginn. Die Unterspannung σ_u war entweder 0 oder entsprach der Hälfte der Oberspannung. Die Versuchsergebnisse zeigten keinen signifikanten Einfluß

der Höhe der Unterspannung auf das Schwingkriechen (bezogen auf σ_m). Der Einfluß des Belastungsalters τ_0 jedoch ist offensichtlich: wird der Beton früh belastet, so ist das Verhältnis von Kriechdehnung infolge zyklischer Belastung zu Kriechdehnung infolge $\sigma_k = \sigma_o = \text{konst.}$ dann klein, wenn die Belastungsgeschichten $\sigma(t)$ bzw. $\sigma_k = \text{konst.}$ früh (kleines τ_0) beginnen.

Von Rostásy, Teichen und Alda [92] wurden umfangreiche Versuche an Leichtbeton durchgeführt, der sowohl einer statischen Beanspruchung als auch einer zyklischen Schwellbeanspruchung unterzogen wurde. Die Oberspannung der Schwellbeanspruchung entsprach der Kriechspannung der statischen Versuche. Als Unterspannung wurden 30 % der Oberspannung gewählt. Die Oberspannung entsprach etwa 25 % der Würfeldruckfestigkeit zum Zeitpunkt τ_0 . Die zyklische Schwellbeanspruchung verlief nach einer periodischen Dreiecksfunktion, beginnend mit σ_o . Die Frequenz lag zwischen $0,16$ und $0,26 \times 10^{-3}$ Hz (Periodendauer T_p zwischen $1,7$ und $1,1$ Stunden). Das Erstbelastungsalter betrug $\tau_0 = 91$ Tage, die Belastungsdauer $t - \tau_0$ ebenfalls 91 Tage. Beim Schwingkriechen war das auf die Mittelspannung σ_m bezogene Kriechen kleiner als das auf σ_k bezogene Kriechen im statischen Kriechversuch. Eine Raffung oder Vorwegnahme von bleibenden Deformationen durch das Schwingkriechen trat also unter den vorgegebenen Bedingungen nicht ein.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die vorliegenden Versuchsergebnisse für den Vergleich von Schwingkriechen und statischem Kriechen mit $\sigma_m = \sigma_k = \text{konst.}$ nur bedingt verwendbare Aussagen liefern. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Kriechen im Hinblick auf die kriecherzeugende Spannung nicht-linear ist, stört vor allem, daß keine Versuche bekannt sind, bei denen die zu vergleichenden Spannungsgeschichten (Schwingkriechen bzw. statisches Kriechen mit $\sigma_m = \text{konst.}$) direkt untersucht wurden, da zumeist die Spannung im statischen Kriechversuch gleich der Oberspannung im Schwingkriechversuch gewählt wurde.

Störend bei der Auswertung der Versuchsergebnisse der Schwingkriechversuche waren die Schwierigkeiten im Versuchsablauf bei Versuchsbeginn, die zumeist eine beträchtliche Vergrößerung der Kriechdehnungen zur Folge hatten.

Gesondert zu betrachten sind die Schwingkriechversuche, bei denen eine deutliche Erniedrigung des E-Moduls im Verlauf der Belastungsdauer eintrat, während in den statischen Kriechversuchen eine Erhöhung des E-Moduls zu beobachten war.

Wie die Versuche von Mehmél u. Kern [84], Mathur [87], Tsui [88], Mickleborough [89] und Kwong [90] zeigen, tritt diese Verkleinerung des E-Moduls nur bei relativ hohen Frequenzen ($f \approx 5$ bis 25 Hz) auf. Auf der anderen Seite zeigen die Versuche von Rostásy, Teichen und Alda [92] an Leichtbeton, die Kurzzeitversuche an Normalbeton von Rostásy und Alda [73] sowie die Versuche an Leichtbeton von Rostásy und Alda [93] eindeutig, daß bei Frequenzen kleiner als etwa $f = 0,1$ Hz die Veränderung des E-Moduls während der Belastung unbeeinflußt bleibt von der Art der kriecherzeugenden Spannungsgeschichte (Schwingkriechen oder statisches Kriechen). In Abschnitt 5 wird daher der Frequenzbereich eingeschränkt, für den die dort aufgestellten theoretischen Ansätze gültig sind.

5. ENTWICKLUNG EINES NICHTLINEAREN ANSATZES ZUR BESCHREIBUNG DES SCHWINGKRIECHENS (VORGABE EINER ZYKLISCHEN SPANNUNGSGESCHICHTE)

5.1. Voraussetzungen und Gültigkeitsbereich

Bei einem viskoelastischen Stoff wie Beton besteht zwischen dessen zeitabhängigen Reaktionen auf verschiedene Erregungsarten, z. B.

$$\epsilon = \text{const.} \quad (\text{Statische Relaxation})$$

$$\epsilon = f(t) \quad (\text{Schwingrelaxation})$$

$$\sigma = \text{const.} \quad (\text{Statisches Kriechen})$$

$$\sigma = f(t) \quad (\text{Schwingkriechen})$$

mit $f(t)$ = zyklische Zeitfunktion

ein ursächlicher Zusammenhang [94]. Die Existenz dieses Zusammenhanges kann zum einen dazu genutzt werden, aus den zahlreichen Untersuchungen über das statische Kriechen auch Aussagen über die anderen Arten der Erregung machen zu können. Zum anderen kann sie dazu dienen, aufgrund von rasch durchzuführenden Schwingungsversuchen Vorhersagen für das Langzeitverhalten zu treffen, die sonst nur durch zeitraubende Dauerversuche gewonnen werden könnten. Es ist das Ziel dieser Arbeit, aufgrund von Erkenntnissen, die auf empirischem Wege gewonnen werden, diese Situation zu formulieren.

Es ist nicht zu erwarten, daß mit dieser Arbeit - oder in absehbarer Zeit, wenn überhaupt - für Beton ein einziger Ansatz $F(\sigma, t, \epsilon)$ für alle denkbaren Randbedingungen gelingt, der thermodynamisch und experimentell einwandfrei abgesichert ist. Aus diesem Grund ist es nach wie vor von großem Nutzen, empirische Gesetzmäßigkeiten zur Entwicklung eines theoretischen Ansatzes zu benutzen, auch wenn dieser nur in einem gewissen Bereich und unter gewissen Voraussetzungen gültig ist.

Es ist zwar seit langem bekannt, welche den Beton kennzeichnenden Größen eine Funktion der Zeit sind. Verhältnismäßig neu aber ist die Vorstellung, daß es sich bei den Phänomenen Kriechen und Relaxation um eine einzige grundsätzliche Verhaltensweise handelt, die - zumindest theoretisch - auch mit nur einem einzigen theoretischen Ansatz zu erfassen sein muß. So darf es keinen prinzipiellen Unterschied geben zwischen den zu erwartenden Reaktionen des Materials auf verschiedene Erregungen. Dies bedeutet z. B., daß es unzutreffend sein muß, den

Beton für das Kriechen als viskoelastischen Festkörper, im rheologischen Modell dargestellt durch Hooke'schen Körper + Kelvin-Körper, und für die Relaxation als viskoelastische Flüssigkeit, dargestellt durch einen Maxwell-Körper + Kelvin-Körper, zu betrachten (s. [59]) oder gar als Maxwell-Körper allein (s. z. B. Dischinger [26]).

Aus Abschnitt 3. ist zu ersehen, daß die Theorie des "reversiblen-irreversiblen" Kriechens" (Summenansatz) das Kriechverhalten von Beton unter veränderlicher Spannung besser zu beschreiben vermag als das "Affine" Kriechen (Produktansatz). Die Grundvorstellung des Summenansatzes wird daher als Ausgangspunkt für die Beschreibung des Kriechverhaltens unter Schwingbeanspruchung und den Vergleich mit dem statischen Kriechen benutzt. Dieser Grundkonzeption (Summenansatz gemäß [47]) liegen folgende Hypothesen zugrunde:

1. Die Gesamtdehnung setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:
 - a) Elastische Dehnung ϵ_{el}
 - b) Verzögert-elastische Dehnung ϵ_v
 - c) Fließdehnung ϵ_f
2. Alle Dehnungsanteile sind linear abhängig von der Erregerspannung.
3. Die verzögert-elastische Dehnung tritt sowohl unter Be- als auch unter Entlastung auf, und zwar in gleicher Größe.
4. Die verzögerte Elastizität ist nicht alternd und besitzt einen zeitlichen Endwert.
5. Der zeitliche Verlauf von ϵ_v ist unabhängig von den Betonabmessungen und dem Klima.
6. Das Fließvermögen des Betons ist lediglich eine Funktion des Betonalters, der Betonabmessungen und des Klimas. Es besitzt einen Grenzwert.

Diese Vorstellung wird durch folgende Hypothesen korrigiert bzw. erweitert:

- I Die elastische Dehnung ist unbeeinflusst von der Art der kriecherzeugenden Beanspruchung.
- II Die Dehnungsanteile ϵ_{el} und ϵ_v sind linear, die Fließdehnung ϵ_f hingegen ist nichtlinear mit der Spannung verknüpft.
- III Die verzögerte Elastizität ist alternd. Alterungsfunktion und Funktion des zeitlichen Verlaufes sind voneinander unabhängig.

- IV Die Fließdehnung besitzt keinen Endwert.
- V Die Fließkurven für unterschiedliches Alter bei Erstbelastung verlaufen zueinander affin.
- VI Die Spannungsnichtlinearität des Fließens ist geringfügig beeinflusst vom umgebenden Klima.
- VII Die Spannungsnichtlinearität und der zeitliche Verlauf des Fließens lassen sich nicht separieren.

Unter Berücksichtigung der Hypothesen I bis VII ergibt sich die folgende Integralgleichung zur Ermittlung der Gesamtdehnung für beliebige, veränderliche Spannungsgeschichten:

$$\varepsilon(t) = \frac{\beta_c}{E(\tau)} \left\{ \bar{\sigma}(t) - \int_{\tau_0}^t \bar{\sigma}(\tau) \cdot \frac{\partial[\varphi_{v\infty}(\tau) \cdot k_v(t-\tau)]}{\partial \tau} d\tau + F(\tau_0) \int_{\tau_0}^t \bar{\sigma}(\tau) \cdot \frac{\partial[k_f(\bar{\sigma}, \tau - \tau_0)]}{\partial \tau} d\tau \right\} \quad (5-1)$$

Vereinbarungsgemäß bedeuten hierin:

- β_c - Zylinderdruckfestigkeit des Betons im Alter von 28 Tagen.
- E - Elastizitätsmodul mit $E(\tau) = \text{const.}$ ($\tau \geq 28$ Tage)
- τ_0 - Erstbelastungsalter des Betons bzw. Beginn der zyklischen Spannungsgeschichte ($\tau_0 > 28$ Tage).
- $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\beta_c}$ - bezogene Spannung, Belastungsgrad mit $0 < \bar{\sigma} \leq 0,6$.
- $\varphi_{v\infty}(\tau)$ - Alterungsfunktion der verzögerten Elastizität (siehe Glg. (5-18)).
- $k_v(t-\tau)$ - Funktion für den zeitlichen Verlauf der verzögert-elastischen Dehnung (siehe Glg. (5-18)).
- $F(\tau_0)$ - Affinitätsfunktion der Fließdehnung $F(\tau_0)$ ist außerdem eine Funktion der Klimabedingungen (siehe Tabelle 5-6).
- $k_f(\bar{\sigma}, \tau - \tau_0)$ - Funktion für den zeitlichen Verlauf der Fließdehnung; die Zeitvariable ist nicht das absolute Betonalter, sondern die Belastungsdauer (siehe Glg. (5-36) bzw. (5-45)).

Glg. (5-1) gilt gemäß Abschnitt 4. mit der Einschränkung, daß die Frequenz f der Schwingbeanspruchung im Druckschwellbereich kleiner als etwa 0,1 Hz ist.

Für τ_0 gilt die allgemeine Eingrenzung der vorliegenden Arbeit, daß nur "reifer" Beton untersucht wird. Als reifer Beton wird definiert, daß $\tau_0 \geq 28$ Tage sein soll.

In den nachfolgenden Abschnitten werden die Hypothesen I bis VII durch beispielhafte Versuchsergebnisse untermauert. Die Funktionen für den zeitlichen Verlauf von verzögerter Elastizität und Fließen werden ebenfalls in diesen Abschnitten hergeleitet.

Die Integralgleichung (5-1) kann durch das in Bild 5-1 gezeigte rheologische Modell anschaulich dargestellt werden. Die zeitunabhängige Spontanelastizität wird durch die Feder, die Fließdehnung durch den Dämpfer eines Maxwell-Körpers dargestellt. Die Viskosität des Maxwell-Dämpfers ist eine Funktion der Belastungsdauer, des Zeitpunktes der Erstbelastung und des Belastungsgrades $\bar{\sigma} = \sigma/\beta_c$. Die verzögerte Elastizität wird durch n in Reihe geschaltete Kelvin-Körper dargestellt. Die Anzahl n wird durch den betrachteten Zeitbereich bestimmt. Wegen der Abhängigkeit der verzögerten Elastizität vom Betonalter sind die Modellkennwerte der Kelvin-Körper zeitabhängig.

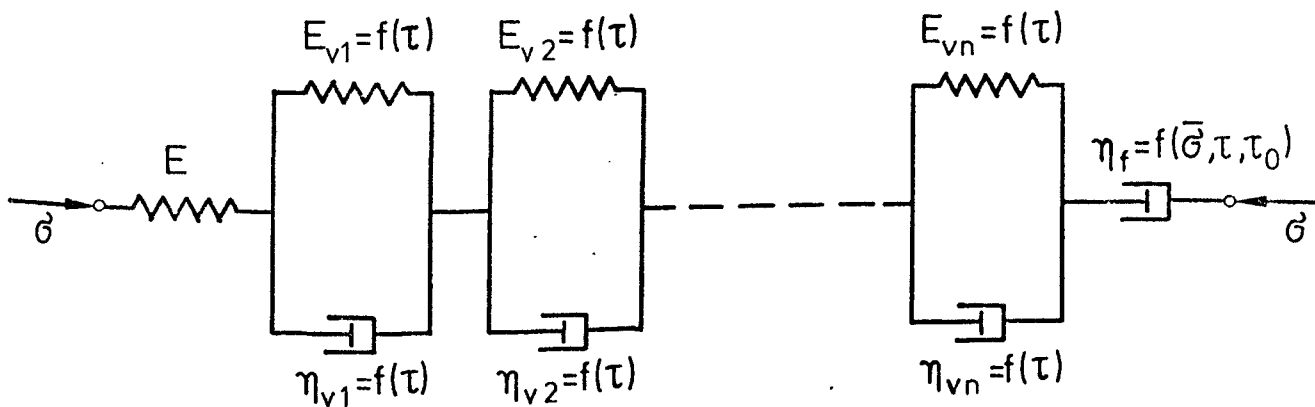


Bild 5-1 Rheologisches Modell zur Glg. (5-1)

5.1.1. Elastische Dehnung

Bei der Auswertung von Kriechversuchen unter konstanter Spannung erfolgt die Berücksichtigung der Spontanelastizität in der Literatur auf fünf verschiedene Arten:

$$1. \varepsilon_{el} = \varepsilon_{el}(\tau_0) \quad (5-2a)$$

$$2. \varepsilon_{el} = \varepsilon_{el}(\tau_e) \quad (5-2b)$$

$$3. \varepsilon_{el} = \varepsilon_{el}(\tau_e) + \varepsilon_p \quad (5-2c)$$

$$4. \varepsilon_{el} = \varepsilon_{el,e}(\tau_0) = \varepsilon_{el}(\tau_0) - \varepsilon_p \quad (5-2d)$$

$$5. \varepsilon_{el} = \varepsilon_{el,dyn.} \quad (5-2e)$$

In diesen Definitionen ist $\varepsilon_{el}(\tau_0)$ gemäß Hansen [95] die unmittelbar nach Erreichen der Kriechspannung gemessene Dehnung, die in einen rein elastischen Anteil $\varepsilon_{el,e}(\tau_0)$ und eine Größe ε_p aufgespalten werden kann. Gemäß Hansen und anderen Forschern, z.B. Yokomichi [96, 97, 98] stellt ε_p (permanent set) eine zeitunabhängige, "plastische" Dehnung dar, die auf Grund unzähliger, sehr kleiner Deformationen oder Mikrorisse während der Erstbelastung des Betons entsteht. Wenn man bedenkt, daß für den Belastungsvorgang am Beginn eines Kriechversuches und die Dehnungsmessung ein endlicher Zeitraum benötigt wird, so ist die Notwendigkeit der Einführung einer "plastischen" Dehnung ε_p nicht einzusehen. Sie läßt sich insofern besser und zutreffender als zeitabhängige, viskose Dehnung interpretieren, zumal dann, wenn man berücksichtigt, daß es sich im Prinzip bei Beton nicht um eine "plastische" Dehnung handeln kann (s. auch Freudenthal [99]). Der grundlegende Unterschied zwischen der Plastizität eines Metalls z. B. und der "scheinbaren" Plastizität des Betons liegt weniger im Bewegungstyp, sondern vielmehr in der Kräfteverteilung zwischen den wirksamen Partikeln. Während beim plastischen Gleiten in Metallen die Kohäsionskräfte stark genug sind, um kontinuierlich die Bindungskräfte während der Bewegung neu zu bilden, rührt die scheinbare Kohäsion zwischen den Bestandteilen des Betons tatsächlich nur von der Adhäsion zwischen den Zuschlägen und dem Zementstein her. Diese wird aber nicht wiederhergestellt, wenn sie im Laufe der Relativbewegung der Teilchen durch die äußeren Kräfte einmal zerstört worden ist. Dies ist - wie in Abschnitt 5.1.4. noch näher erläutert wird - auch der Grund dafür, daß es falsch sein muß, das Kriechen als einen zeitabhängigen, plastischen Vorgang zu bezeichnen. In Wirklichkeit handelt es sich, abgesehen von der verzögerten Elastizität, um ein "kaltes" (s. Trost [28]), viskoses Fließen. Dieses Fließen ist ein von bleibenden Strukturänderungen begleiteter Verformungsvorgang mit einer Geschwindigkeit, die während der Belastung monoton abnimmt. Dieser Vorgang ist - analog zu den Kunst-

stoffen - zu jedem Zeitpunkt instationär und schließt daher jede Art Newton'scher Viskosität im Sinne der DIN 1342 [100] aus, wie auch Hieke [101] feststellt. Die - im physikalischen Sinne - exakteste Methode, eine elastische Dehnung des Betons zu definieren, besteht darin, sie über den dynamischen Elastizitätsmodul E_{dyn} zu berechnen (z. B. nach der Methode von Lühr [102], Brunnarski [103] oder Pickett [104]). Die so bestimmte "elastische" Dehnung hat den Vorteil, reproduzierbar zu sein, hat auf der anderen Seite jedoch den Nachteil, für den Ingenieur wenig anschaulich und somit zu wenig praxisbezogen zu sein. Üblicherweise werden Kriechversuche mit der Glg. (5-2a) ausgewertet. Einen rechnerischen Weg, eine belastungsdauerabhängige elastische Dehnung zu definieren, zeigt Bažant [3, 18], indem die gemessenen Gesamtdehnungen eines statischen Kriechversuches nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate approximiert werden für den Ansatz:

$$\frac{1}{E(\tau_0)} = \frac{1}{E_0} + \frac{\varphi_1}{E_0} (\tau_0)^{-m} \cdot (t - \tau_0)^n \quad (5-3)$$

Der statische (konventionelle) E-Modul entspricht gemäß Bažant einer Belastungsdauer von etwa 10^{-3} Tagen, während man den dynamischen E-Modul E_{dyn} für $t - \tau_0 \approx 10^{-7}$ Tage erhält. E_0 , φ_1 , m und n sind durch die Approximation erhaltene Konstanten.

Die Annahme eines konstanten E-Moduls in Glg. (5-1) erscheint unter den gegebenen Bedingungen ($\tau_0 \geq 28$ Tage, $\bar{\sigma} = \sigma/\beta_c \leq 0,6$) gerechtfertigt. Zwischen $\tau_0 = 28$ Tagen und $\tau_0 = 1400$ Tagen ergibt sich nach Rostásy, Teichen und Engelke [25] für Normalbeton nur ein geringer Zuwachs des E-Moduls (s. Tabelle 5-1).

Tabelle 5-1: Zunahme des E-Moduls nach Rostásy, Teichen und Engelke [25] für Normalbeton

		Betonalter τ_0 in Tagen						
		28	90	180	270	360	720	1400
bezogener statischer E-Modul	$\frac{E(\tau_0)}{E(28)}$	1,00	-	-	-	-	1,12	1,16
bezogener dynamischer E-Modul	$\frac{E_{dyn}(\tau_0)}{E_{dyn}(28)}$	1,00	0,99	1,02	1,05	1,05	1,08	1,07

Tabelle 5-2: Zunahme des E-Moduls nach Rostásy, Teichen und Alda [64] für Leichtbeton

	Betonalter τ_0 in Tagen			
	28	~210	380	1540
bezogener statischer E-Modul $\frac{E(\tau_0)}{E(28)}$	1,00	1,00	1,04	1,10

Für Leichtbeton ergibt sich gemäß Rostásy, Teichen und Alda [64] ein ähnliches Ergebnis. Da in der vorliegenden Arbeit vor allem ein Vergleich der Kriechdehnungen unter schwingender und statischer Beanspruchung durchgeführt werden soll (Vergleichsgröße $\eta(t, \tau)$ gemäß Glg. (3-79) bzw. (3-80)), ist jedoch weniger die Zeitabhängigkeit des E-Moduls wichtig, als vielmehr die Beantwortung der Frage, ob sich der E-Modul bei unterschiedlicher Beanspruchung in Abhängigkeit von der Belastungsdauer gleichförmig verändert oder nicht. Als Beispiele werden die Versuchsergebnisse von Rostásy, Teichen und Alda [92] für Leichtbeton bzw. von Tsui [88], Mickleborough [89] und Kwong [90], sowie die Ergebnisse der noch unveröffentlichten Münchener Versuche für Normalbeton zur Klärung dieser Frage herangezogen. Wie auch bei den in Abschnitt 4.

Tabelle 5-3: Vergleich des E-Moduls bei unterschiedlicher Belastung für Normalbeton (Kwong [90]) und Leichtbeton (Rostásy, Teichen und Alda [92])

	Versuchs- beginn τ_0	Belastungs- dauer $\tau_e - \tau_0$	Verhältnis $\frac{E(\tau_e)}{E(\tau_0)}$ bei schwingender statischer Beanspruchung	
	Tage	Tage	-	-
Normalbeton ([88, 89, 90])	28	30	1,20	1,18
Normalbeton (Münchener Versuche, Serie KW)	28	~ 840	1,20	1,19
Leichtbeton ([92])	91	91	1,07	1,05

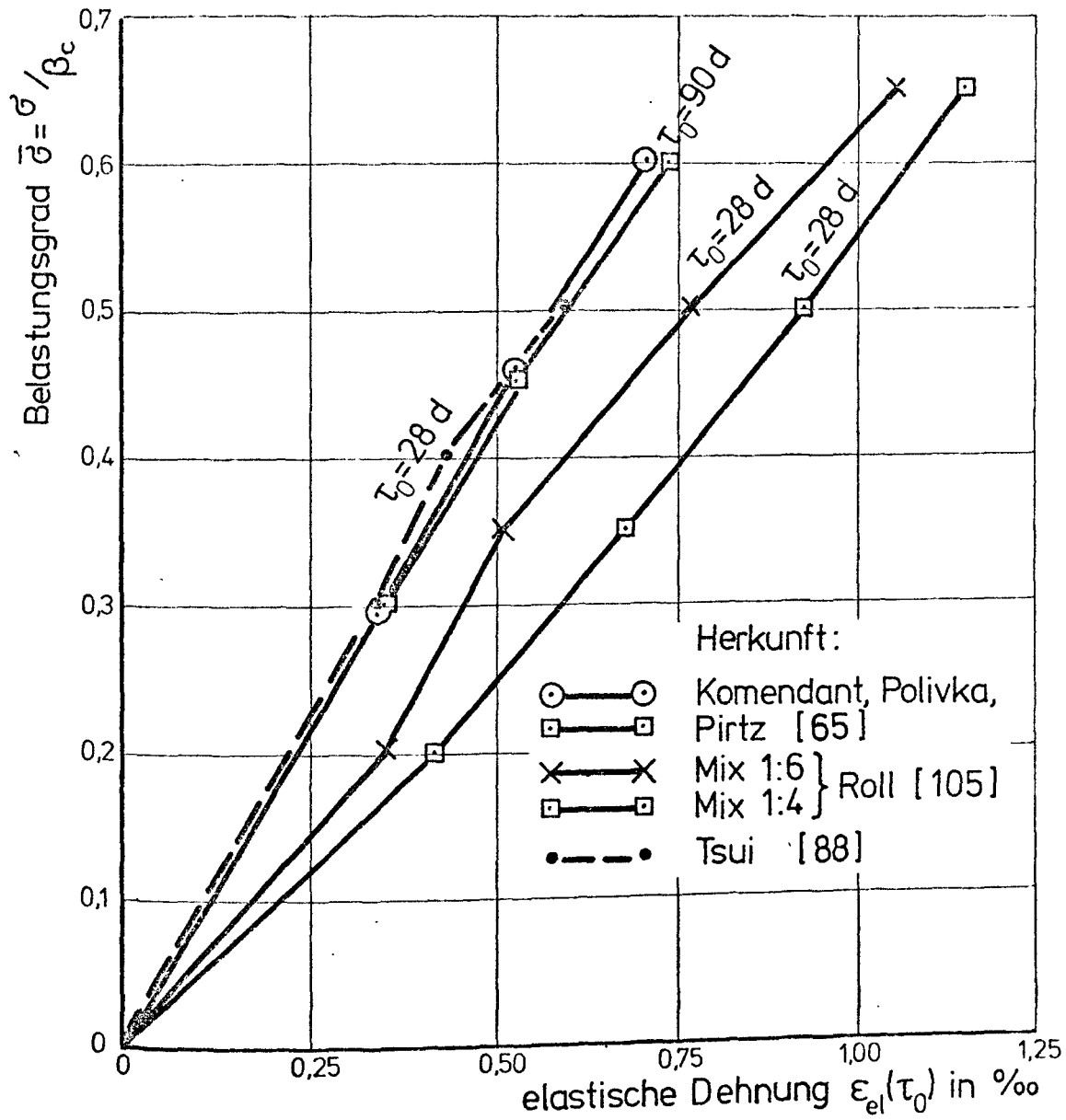


Bild 5-2 Abhängigkeit der elastischen Dehnung $\bar{\epsilon}_{el}(\tau_0)$ vom Belastungsgrad bei Normalbeton

erwähnten Versuchen wird deutlich, daß die Veränderung des E-Moduls für Frequenzen $f \leq 0,1$ Hz unbeeinflußt davon bleibt, ob die Belastung im Kriechversuch schwingend oder statisch erfolgt, wie aus der Tabelle 5-3 zu ersehen ist.

Zur Überprüfung der Linearität der elastischen Dehnung bzw. der Spannungsunabhängigkeit des E-Moduls sind in Bild 5-2 einige Versuchsergebnisse dargestellt, die aus den Kriechversuchen von Komendant, Polivka und Pirtz [65], Roll [105] und Tsui [88] stammen. Die Annahme einer linearen Beziehung zwischen elastischer Dehnung und Spannung erscheint gerechtfertigt. Wie in Abschnitt 5.1.4. noch gezeigt werden wird, ist die Annahme einer Linearität der elastischen Dehnung wesentlich eher gerechtfertigt als die Annahme linearen Kriechens.

Zusammenfassend erscheint es gerechtfertigt, den E-Modul als unbeeinflußt von der Spannung anzusetzen.

5.1.2. Nichtlinearität des Kriechens

Im bisher Gesagten sowie in den maßgebenden Berechnungsgrundlagen [33, 47, 53] wird stets lineares Kriechen angenommen. Auf die Berechtigung dieser Annahme wird selten eingegangen. In der Literatur steht unzweifelhaft fest, daß Kriechen schon bei geringsten Spannungen auftritt (siehe z. B. Ali und Kesler [9]). Relativ wenig wird jedoch die Nichtlinearität der Kriechdehnungen beachtet, obwohl sie bereits bei geringen Belastungsgraden beobachtet wurde, wie Bild 5-3 beweist, das der Arbeit von Ali und Kesler [9] entnommen wurde.

Üblicherweise wird in der Literatur ein Bereich definiert, innerhalb dessen Linearität von ϵ_k und $\bar{\sigma}$ angenommen wird. Notwendigerweise muß dann der Punkt, ab dem Nichtlinearität auftreten soll, als eine Art "Proportionalitätsgrenze" für die Kriechdehnung bezeichnet werden. Diese Proportionalitätsgrenze wird in der Literatur fiktiv in unterschiedlicher Höhe angenommen. Von Mamillan [106] wird sie z. B. sehr hoch mit $\bar{\sigma} = 0,75$ angesetzt. Mullick [107] hingegen schreibt, daß Nichtlinearität ab $\bar{\sigma} = 0,25$ "offenbar" ist, und stellt für eine Belastungsdauer von 30 min die folgenden Beziehungen für die Abhängigkeit der Kriechdehnung vom Belastungsgrad auf:

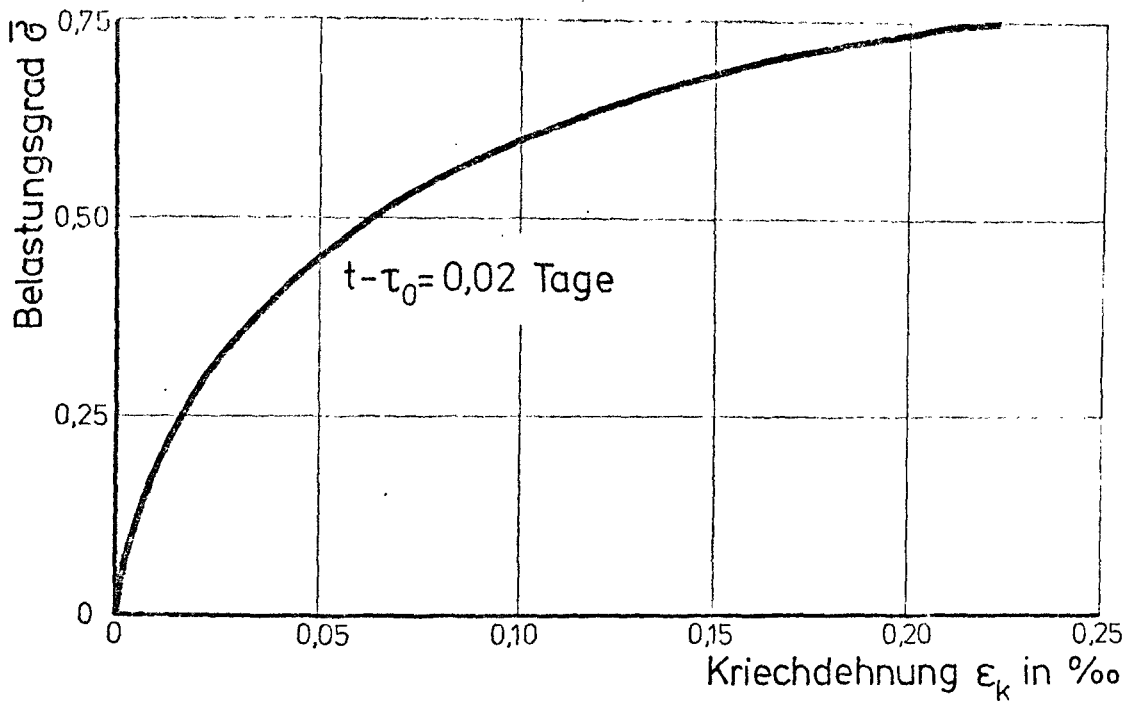


Bild 5-3 Typische Abhängigkeit der Kriechdehnung vom Belastungsgrad gemäß Ali und Kesler [9].

$$\epsilon_k = C(t - \tau_0, \tau_0) \cdot f(\bar{\sigma}) \quad (5-4)$$

mit $C(t - \tau_0, \tau_0)$ - Kriechfunktion in Abhängigkeit vom Belastungsalter τ_0 und der Belastungsdauer $t - \tau_0$.

$$f(\bar{\sigma}) = M(\bar{\sigma}) \cdot \bar{\sigma}$$

$$0 < \bar{\sigma} < 0,18: f(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} \quad (5-5)$$

$$\bar{\sigma} > 0,18: f(\bar{\sigma}) = 0,049 + 0,22 \cdot \bar{\sigma} + 2,94 \bar{\sigma}^2 \quad (5-5a)$$

Mullick stellte in seinen Versuchen (maximale Belastungsdauer $t - \tau_0 = 70$ Tage) ferner fest, daß die Funktion $f(\bar{\sigma})$ unabhängig von der Belastungsdauer ist. Dies bedeutet, daß die Funktion für die Nichtlinearität und die Funktion für den zeitlichen Verlauf des Kriechens voneinander unabhängig und somit separierbar sind. Es muß jedoch bemerkt werden, daß Mullick die Zeitunabhängigkeit der Nichtlinearitätsfunktion nur bis $\max(t - \tau_0) = 28$ Tage überprüfte. Außerdem ermittelte er die Kriechdehnung aus der Gesamtdehnung, indem zur Bestimmung der elastischen Dehnung der dynamische Elastizitätsmodul (gemäß Glg. (5-2e)) benutzt wurde.

Bažant, Osman und Thonguthai [3] und andere teilen das gesamte Kriechen auf in "Trocknungskriechen" und "Grundkriechen", eine Aufteilung, die erstmals von Ali und Kesler [109] vorgenommen wurde. Bažant e. a. versehen das Trocknungskriechen für sich mit einer Spannungslinearität:

$$g_d = \frac{R_d(r)}{R_d(0,3)} \quad \text{mit } r = \frac{\bar{\sigma}}{f} \quad (5-6)$$

$$R_d(r) = 1 + a_d r^2 (3-r)$$

$$a_d \approx 0,05$$

sowie zusätzlich das Gesamtkriechen mit einer weiteren Spannungsnichtlinearität:

$$\bar{f}_d = \frac{R(r)}{R(0,3)} \quad \text{mit } R(r) = 1 + a(1 - \sqrt{1-r^6}) \quad (5-7)$$

$$a \approx 1,1$$

Bei f' wird außerdem die Nacherhärtung des Betons berücksichtigt. Die angesetzte Nichtlinearität ist ziemlich gering. Für $\tau_0 = 28$ d, $t - \tau_0 = 365$ d ergibt sich z. B. für $\bar{\sigma} = r = 0,6$:

$$\bar{f}_d \cdot g_d = 1,14$$

Bažant e. a. geben jedoch keinen Hinweis darauf, wie diese Nichtlinearität für variable Spannung (einschl. einer Entlastung) anzusetzen ist. Gamble und Thomass [110] stellten, ausgehend von Glg. (3-8) bzw. (3-13), die folgende nichtlineare Beziehung für das Kriechen auf:

$$\epsilon_k(t) = S_c \cdot C(t - \tau_0, \tau_0) \cdot F(\bar{\sigma}(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^t S_r \cdot C(t - \tau, \tau) \frac{\partial F(\bar{\sigma}(\tau))}{\partial \tau} d\tau \quad (5-8)$$

Hierin ist $S_c = 1$, S_r ist abhängig von der Belastungsdauer und wird relativ willkürlich gesetzt zu:

$$S_r = \begin{cases} 0,76 & \text{für } t - \tau_0 < 72 \text{ h} \\ 1 - 0,24 \frac{\epsilon_k(72)}{\epsilon_k(t, \tau_0)} & \text{für } t - \tau_0 > 72 \text{ h} \end{cases} \quad (5-9)$$

Die Nichtlinearitätsfunktion $F(\bar{\sigma}) = M(\bar{\sigma}) \bar{\sigma}$ berücksichtigt die Veränderung des Belastungsgrades $\bar{\sigma}$ infolge Alterung. Diese Veränderung kann für $\tau_0 > 28$ Tage vernachlässigt werden, und Glg. (5-8) stellt eine nichtlineare Kriechbeziehung dar, in der die Spannungsabhängigkeit vom zeitlichen Verlauf des Kriechens getrennt werden kann. $S_r = f(t - \tau_0)$ berücksichtigt die Irreversibilität der Kriechdehnung, die über die Irreversibilität infolge Alterung hinausgeht, und

kann durchaus die in Abschnitt 3.3. beschriebenen Mängel des affinen Kriechens, wie es von Glg. (5-8) angesetzt wird, unter bestimmten Bedingungen aufweisen.

Einen nichtlinearen Summenansatz machte Warner [111], indem das Differential des Kriechens und der verzögerten Elastizität mit der gleichen separierbaren Spannungsnichtlinearitätsfunktion faktoriell korrigiert wird:

$$\dot{\epsilon}_k = (\dot{\epsilon}_f + \dot{\epsilon}_v) (1 + \bar{f}(\bar{\sigma})) \quad \text{mit } (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \quad (5-10)$$

Warner setzt für

$$\bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_p = 0,4: \bar{f}(\bar{\sigma}) = 0 \quad (5-11)$$

und damit lineares Kriechen an, während für

$$\bar{\sigma}_p < \bar{\sigma} < 1: \bar{f}(\bar{\sigma}) = \alpha_n \left(\frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_p}{1 - \bar{\sigma}_p} \right)^n \quad (5-11a)$$

gesetzt wird. In Glg. (5-11a) sind α_n und n experimentell zu bestimmende Konstanten. Gemäß den von Warner gewählten Werten ergibt sich z. B. für $\bar{\sigma} \approx 0,68$ ein Nichtlinearitätskoeffizient von

$$\bar{f}(\bar{\sigma}) = 1,0 + f'(\bar{\sigma}) = 2,0$$

Andere Autoren rechnen eine Nichtlinearität der Kriechverformung praktisch ab $\sigma = 0$ an, siehe z. B. Freudenthal [108] bzw. Nielsen [7], die eine Nichtlinearität der Kriechdehnung gemäß der Beziehung

$$\epsilon_k(t) = K_3 \cdot \sinh(K_2 \cdot \bar{\sigma}) \quad (5-12)$$

ansetzen.

Die Evidenz der Nichtlinearität des Kriechens ergibt sich aus Bild 5-3 eindeutig. Geht man von der Möglichkeit aus, die Kriechverformung gemäß Glg. (2-7) in Fließen und verzögerte Elastizität aufspalten zu können, so stellt sich jedoch die Frage, ob beide Anteile oder nur einer von ihnen nichtlinear von der kriecherregenden Spannung abhängt.

Zur Klärung dieser Frage sollen einige ausgewählte Versuchsergebnisse herangezogen werden. Bild 5-4 ist der Arbeit von Roll [105] entnommen. In einer Isochronen-Darstellung ist für zwei Mischungsverhältnisse (Zement : Zuschlag = 1 : 6 bzw. 1 : 4) die Kriechdehnung in Abhängigkeit vom Belastungsgrad dargestellt. Die von Roll verwendeten Prüfkörper (Zylinder $\varnothing 7,6$ cm, $h = 25,4$ cm)

aus Normalbeton (Beton mit herkömmlichen Zuschlägen) waren unversiegelt, das Betonalter bei Belastungsbeginn betrug $\tau_0 = 28$ Tage. Wie aus den links angeordneten Bildern ersichtlich, ist die Kriechdehnung ausgeprägt nichtlinear abhängig vom Belastungsgrad. Nach einer Belastungsperiode von $t - \tau_0 = 210$ d wurden die Prüfkörper voll entlastet. Die dann meßbare verzögerte Elastizität

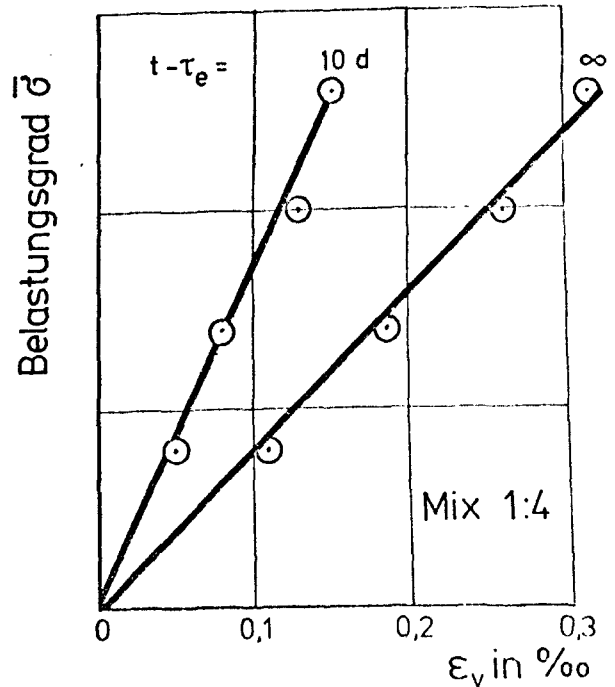
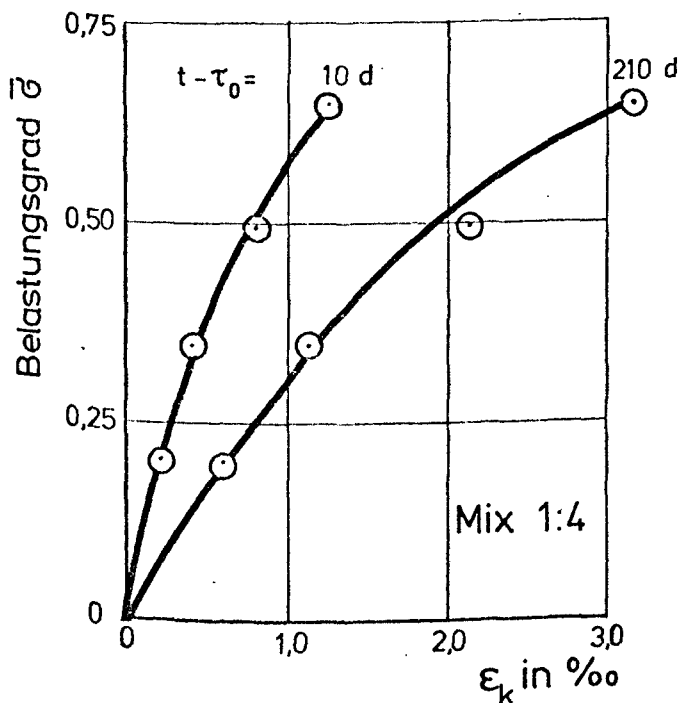
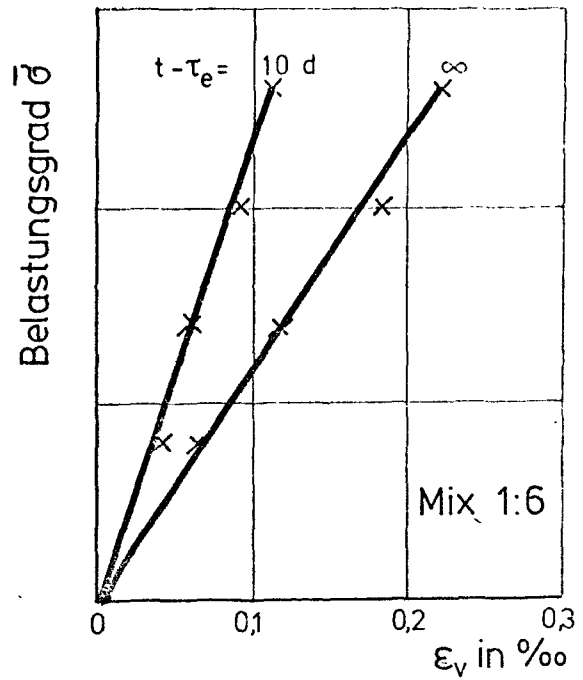
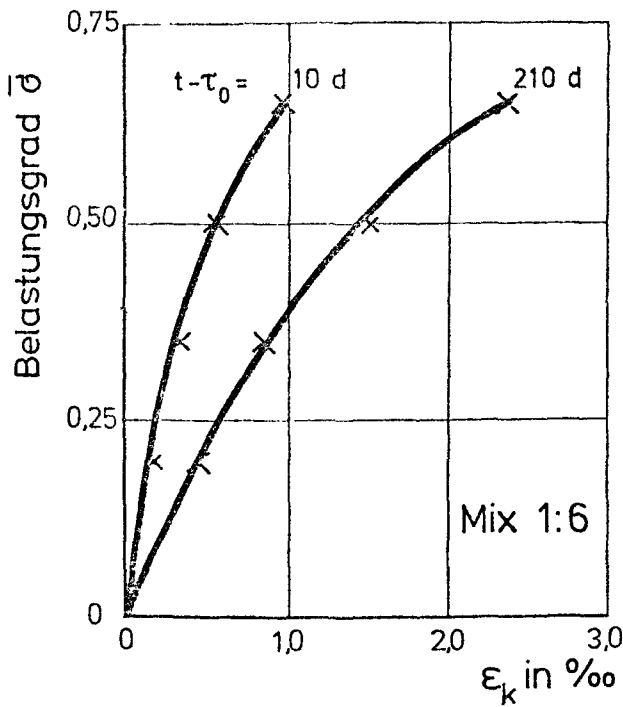


Bild 5-4 Kriechdehnung und verzögert-elastische Dehnung in Abhängigkeit vom Belastungsgrad nach Roll [105]. Belastungsalter $\tau_0 = 28$ d, unversiegelte Prüfkörper

wurde über einen langen Zeitraum $t - \tau_e$ verfolgt. Es zeigte sich (siehe die rechts angeordneten Darstellungen von Bild 5-4), daß die verzögert-elastische Dehnung ϵ_v linear abhängig ist vom Belastungsgrad. Die Erkenntnis wird bestätigt durch die Versuche an versiegelten Betonproben, die von Komendant, Polivka und Pirtz [65] durchgeführt wurden. In diesen Versuchen betrug das Belastungsalter $\tau_0 = 90$ d. Aus Bild 5-5 ist die Nichtlinearität der Kriechdehnung ϵ_k in Abhängigkeit vom Belastungsgrad $\bar{\sigma}$ klar zu erkennen. Leider wurde nicht in allen Versuchen nach Entlastung die verzögerte Elastizität gemessen. Dennoch zeigen die zur Verfügung stehenden Meßergebnisse im Rahmen der bei Beton zu erwartenden Streuungen eine Linearität der verzögert-elastischen Dehnungen, wie aus Bild 5-6 zu ersehen ist. Da in der Serie "York" die Entlastung für $\bar{\sigma} = 0,6$ nicht verfolgt wurde, ist lediglich die Serie "Berks" dargestellt. In dieser Serie stehen für $\bar{\sigma} = 0,30$ keine Ergebnisse zur Verfügung. Wenn die verzögerte Elastizität nichtlinear abhängig von $\bar{\sigma}$ wäre, müßte sich dies jedoch vor allem bei hohen Belastungsgraden zeigen. Dies wird jedoch von Bild 5-6 widerlegt.

Unter der Hypothese, daß in einem Relaxationsversuch bei Vollentlastung die Endspannung dann als maßgebend für die Größe der verzögerten Elastizität angesehen werden kann, wenn sich die Spannung in einem langen Zeitraum vor Entlastung nicht mehr nennenswert geändert hat, können auch die Versuche von Rostázy, Teichen und Engelke [25] zur Überprüfung der Linearität der verzögert-elastischen Dehnung herangezogen werden. Die Relaxationsspannung wurde in diesen Versuchen während des Zeitraumes von 2 Jahren vor Entlastung nur noch um 5 % bezogen auf die Endspannung verändert. Die exakt lineare Abhängigkeit der Versuchsserien O, LS und LF zeigt Bild 5-7.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die vorliegenden Versuchsergebnisse eine nichtlineare Abhängigkeit der Kriechdehnung und eine lineare Abhängigkeit der verzögerten Elastizität vom Belastungsgrad $\bar{\sigma}$ und somit auch von der Spannung $\sigma = \bar{\sigma} \cdot \beta_c$ erkennen lassen. Da sich das Kriechen als Summe von Fließen und verzögerter Elastizität darstellen läßt, ergibt sich, daß die Beziehung zwischen Spannung und Fließdehnung nichtlinear ist. Der Ansatz für die Nichtlinearität der Fließdehnung wird in Abschnitt 5.1.4. eingehend erläutert werden.

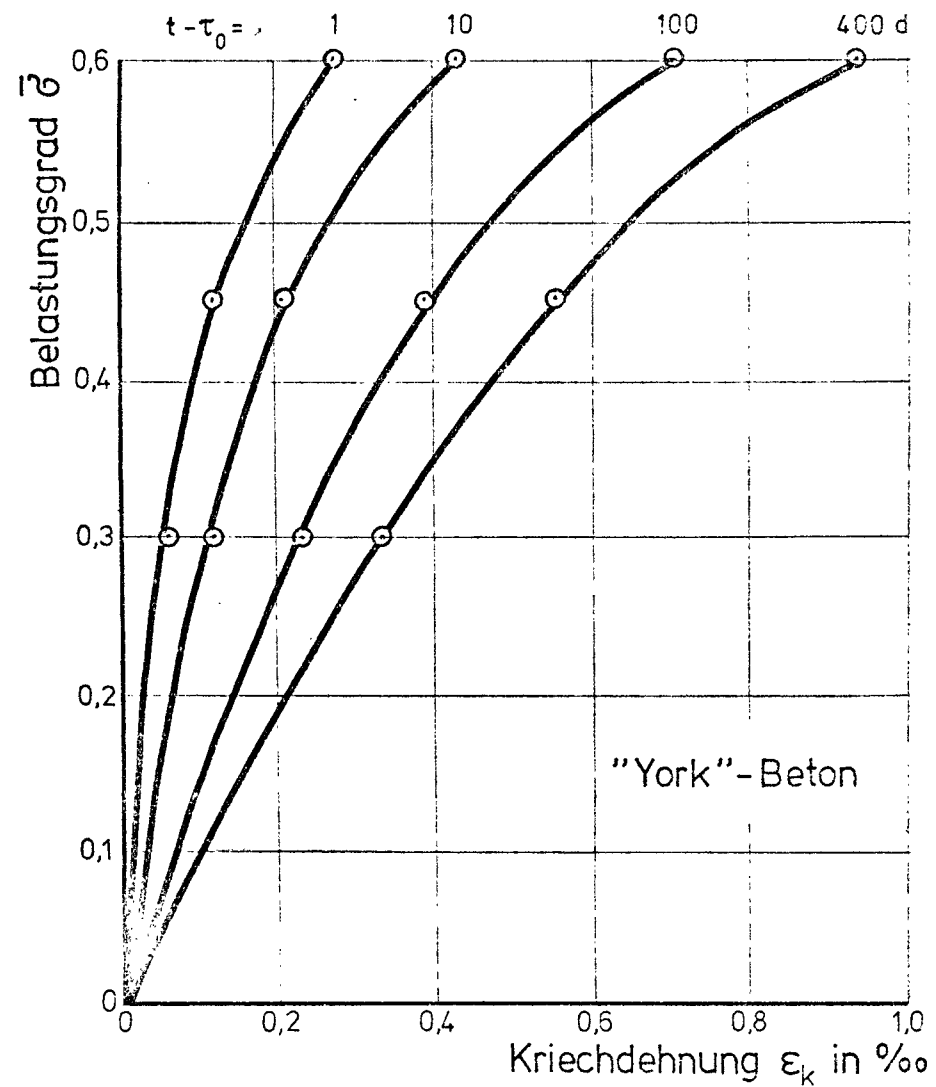
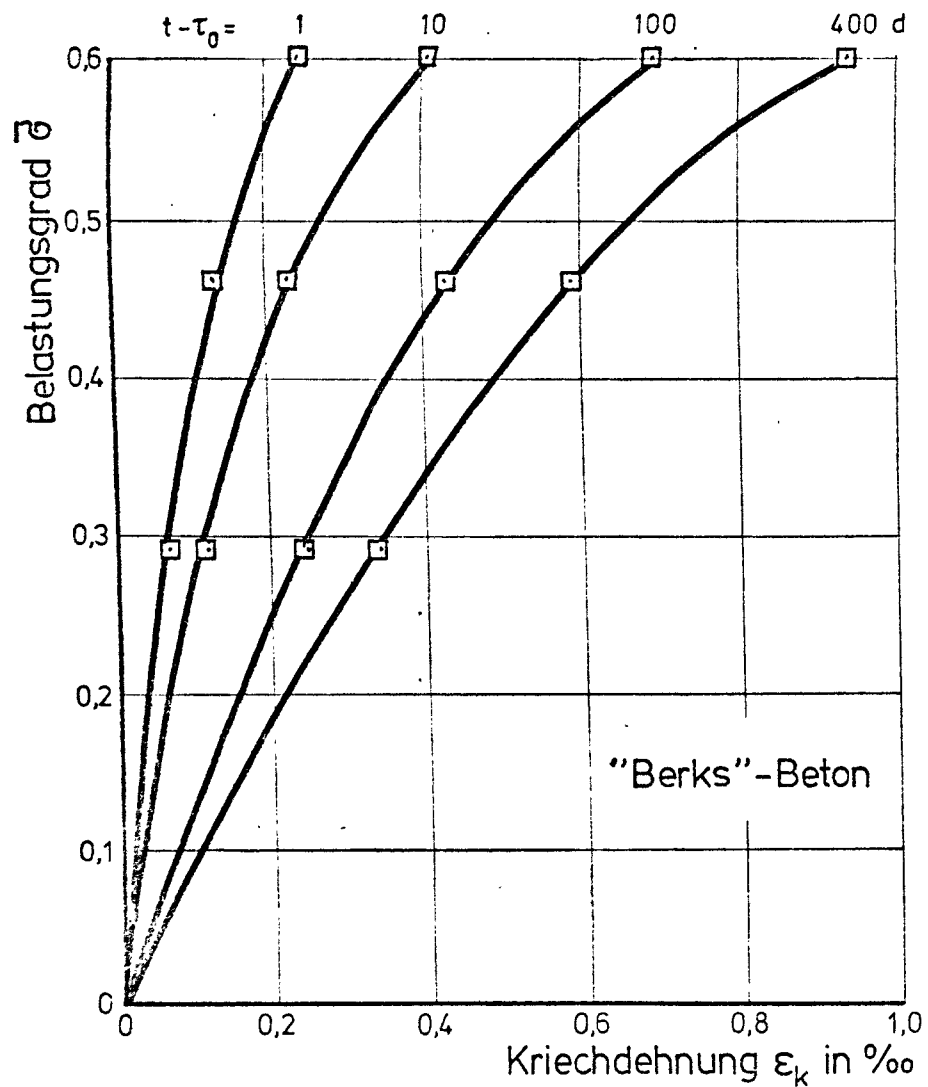


Bild 5-5 Kriechdehnung in Abhängigkeit vom Belastungsgrad nach Komendant, Polivka und Pirtz [65].
Belastungsalter $\tau_0 = 90$ d, versiegelte Prüfkörper.

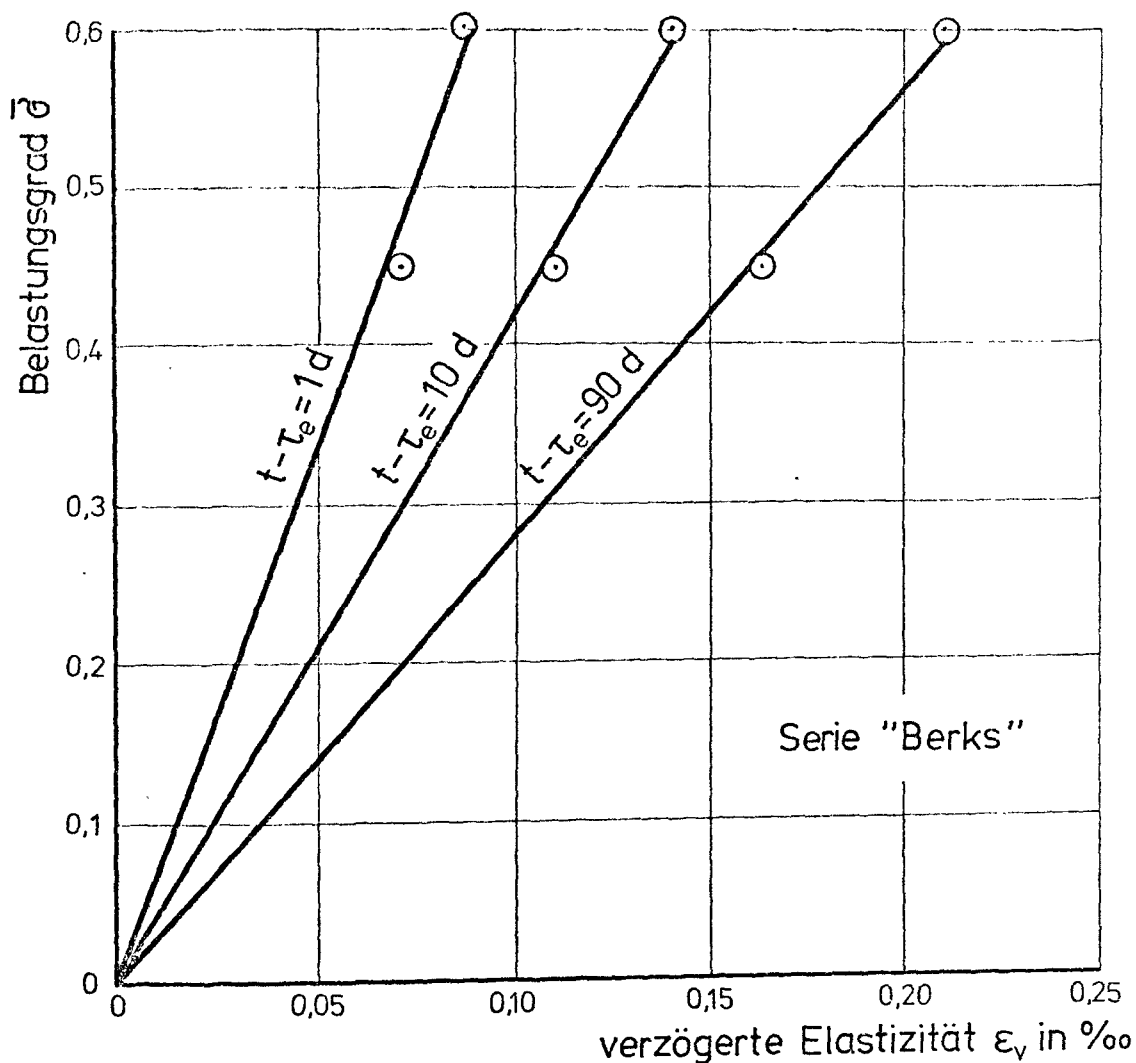


Bild 5-6 Verzögerte Elastizität in Abhängigkeit vom Belastungsgrad nach Komendant, Polivka und Pirtz [65]. Belastungsalter $\tau_0 = 90 d$, versiegelte Prüfkörper, Entlastungsalter $\tau_e = 494 d$.

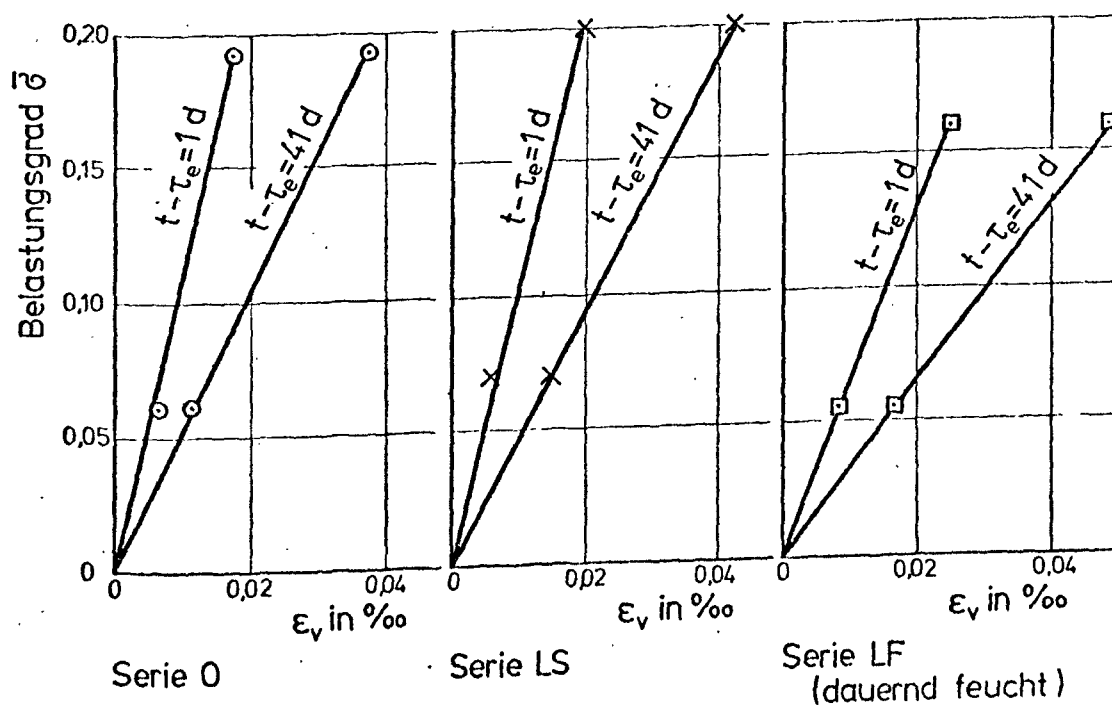


Bild 5-7 Verzögerte Elastizität in Abhängigkeit vom Belastungsgrad nach Rostásy, Teichen und Engelke [25]. Belastungsalter $\tau_0 = 28 d$, Entlastungsalter $\tau_e = 1343 d$.

5.1.3. Verzögerte Elastizität

Die Tatsache, daß sich die gesamte Kriechverformung aus einem reversiblen Anteil ϵ_v und einem irreversiblen Anteil ϵ_f zusammensetzt, ist mittlerweile unbestritten. Schwierigkeiten bereitet es jedoch, sie nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu trennen. Nach allgemeiner Anschauung tritt die verzögerte Elastizität unter Belastung in gleicher Größe wie bei Entlastung auf; d. h. in der Zeitfunktion muß als Variable die Einwirkungsdauer $t - \tau$ auftreten (siehe z. B. Bažant [112]). Erhebliche Schwierigkeiten treten dadurch auf, daß die verzögerte Elastizität im Experiment während der Belastung nicht von der Fließdehnung separiert werden kann, sondern lediglich nach Entlastung gemessen werden kann. Bild 5-8 verdeutlicht den Fehler, der bei der Ermittlung der verzögert-elastischen Dehnung in Kauf genommen werden muß. Im Zeitraum $\tau_0 < t < \tau_e$ möge sich die verzögerte Elastizität in der dargestellten Weise entwickeln. Wenn sich zum Zeitpunkt τ_e noch kein Endwert von ϵ_v eingestellt

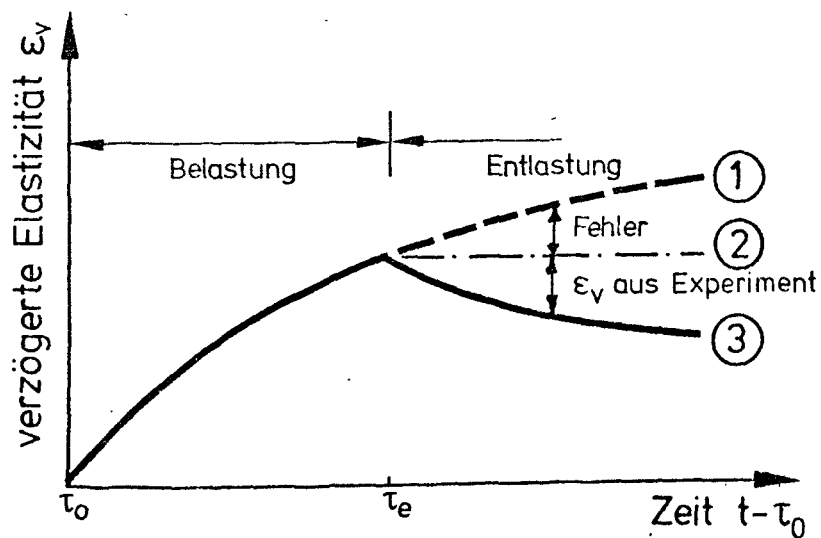


Bild 5-8 Schematischer Verlauf der verzögerten Elastizität im Einstufenversuch

hat, würde sie sich qualitativ entsprechend Kurve ① weiterentwickeln. Aus dem Experiment kann ① jedoch nicht ermittelt werden, so daß bei der Ermittlung des Stoffgesetzes für ϵ_v als Differenz von ③ und ② der Fehler ② - ① in Kauf genommen werden muß. Da sich nach allgemeiner Anschauung die verzögerte Elastizität sehr rasch aufbaut (siehe z. B. [13, 113, 114, 115]), ist dieser Fehler schon nach kurzer Belastungsdauer vernachlässigbar klein.

Nach Rüsç, Jungwirth und Hilsdorf [4] ist der Ablauf der verzögert-elastischen Verformung von der Probenform, der Betonzusammensetzung und dem Betonalter weitgehend unabhängig. Auch der Endwert der verzögert-elastischen Verformung, den man zweckmäßig als Bruchteil der elastischen Verformung ausdrückt, ist

nach Rüschi [4] praktisch unabhängig von diesen Parametern. Rüschi zufolge ist es ebenfalls ohne Einfluß auf die verzögerte Elastizität, ob der Beton austrocknen kann oder nicht. Eine ähnliche Aussage liefern die Versuchsergebnisse von Seki und Kawasumi [116], die in Bild 5-9 dargestellt sind. An versiegelten und unversiegelten Proben, die bei $T = 20^\circ\text{C}$ im Betonalter von 28 Tagen einer gleich großen Kriechspannung unterworfen wurden, wurden nach der Entlastung zum Zeitpunkt $\tau_e = 98$ Tage die verzögert-elastischen Dehnungen gemessen. Während - wie zu erwarten - das bezogene Kriechen φ_k für die konstant feuchten (versiegelten) Proben zum Zeitpunkt der Entlastung nur etwa halb so

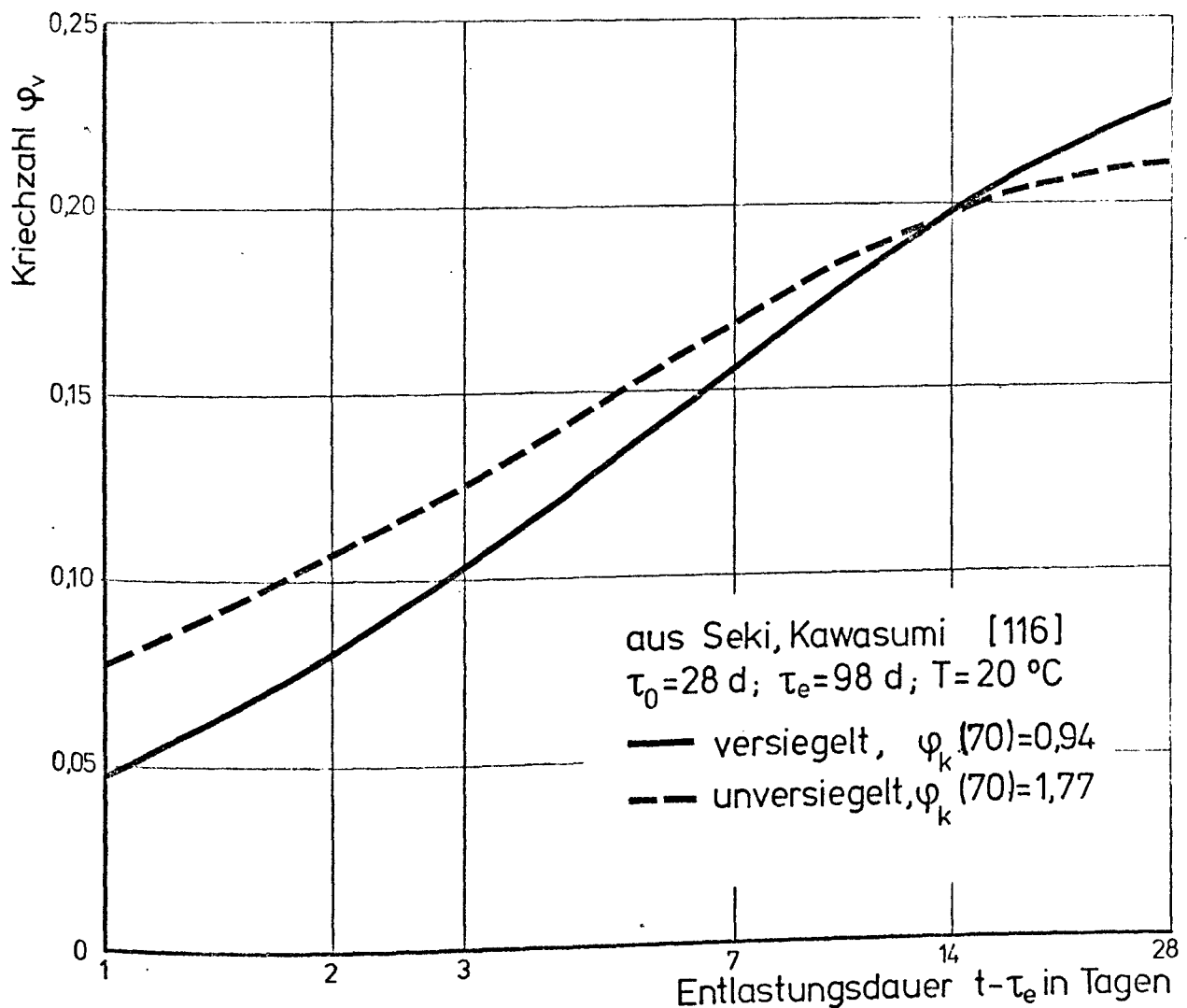


Bild 5-9 Zeitliche Entwicklung der verzögerten Elastizität bei unterschiedlicher Betonfeuchtigkeit

groß wie bei den Proben war, die einer Austrocknung ausgesetzt waren, verhält sich die bezogene verzögerte Elastizität φ_v im Rahmen der zu erwartenden Genauigkeit als von der Feuchtigkeit (Klima) unbeeinflusst.

Allgemein wird es in der Literatur als gesichert angenommen, daß die verzögerte Elastizität von der Feuchtigkeit, Probenform und von der Betonzusammensetzung unbeeinflusst bleibt. Beim letztgenannten Parameter wurde jedoch verschiedentlich eine Beeinflussung festgestellt, so z. B. von Roll [105] und Jessop [117]. Beide Autoren stellten fest, daß bei Zementsteinproben bzw. bei sehr zementreichem Beton ein erhöhter φ_v -Anteil zu beobachten ist. Für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Betone (Zementgehalt $\leq 500 \text{ kg/m}^3$) kann jedoch davon ausgegangen werden, daß die verzögerte Elastizität nur sehr wenig von der Betonzusammensetzung beeinflusst wird.

Wesentlich stärker wird Kritik daran geübt, daß die verzögerte Elastizität unabhängig vom Betonalter angesetzt wird, z. B. von Bažant und Osman [118]. Dieser Parameter soll im folgenden untersucht werden. Zunächst wurde überprüft, ob der zeitliche Verlauf der verzögerten Elastizität vom Entlastungsalter unbeeinflusst ist. Hierfür wurden die Versuchsergebnisse von Rostásy, Teichen und Engelke [25], Wesche [66], Rüscher, Kordina und Hilsdorf [119], Komendant, Polivka und Pirtz [65] und den unveröffentlichten "Münchener Versuchen" für Normalbeton sowie von Rostásy, Teichen und Alda [92], Rostásy, Teichen und Alda [64] für Leichtbeton analysiert. Bei all diesen Versuchen (ca. 60 Versuchsserien) war das Erstbelastungsalter $\tau_0 \geq 28$ Tage und die Belastungsdauer $t - \tau_0 \geq 100$ Tage. Da in den ersten 100 Tagen nach Entlastung der zeitliche Verlauf von φ_v sehr gut durch Glg. (2-10) dargestellt werden kann, wurden die Versuchsergebnisse nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für diese Funktion approximiert. Das Bestimmtheitsmaß betrug im Mittel $r^2 = 0,94$ bei einem Variationskoeffizienten von $v = 7,3 \%$.

In Bild 5-10 ist das Ergebnis dargestellt. Es enthält den zeitlichen Verlauf der verzögerten Elastizität in bezogener Form in Abhängigkeit von der Entlastungsdauer $t - \tau_e$ gemäß der Beziehung:

$$0 < t - \tau_e \leq 100 \text{ d} : k_v(t - \tau_e) = \frac{\varphi_v(t - \tau_e)}{\varphi_v(100 \text{ d})} = a \cdot (t - \tau_e)^b \quad (5-13)$$

Bei einem Vergleich mit dem Verlauf von k_v gemäß den Spannbetonrichtlinien [47] zeigt sich im untersuchten Zeitbereich eine sehr gute Übereinstimmung. Es kann daher davon ausgegangen werden, daß der zeitliche Ablauf der verzögerten Elastizität genügend genau durch den in [47] angegebenen Verlauf angenähert werden kann. Es konnte jedoch nicht bestätigt werden, daß der zeitliche Ablauf der verzögerten Elastizität wesentlich von der Belastungsdauer abhängig beeinflusst wird, daß bei einer langen Belastungsdauer der zeitliche

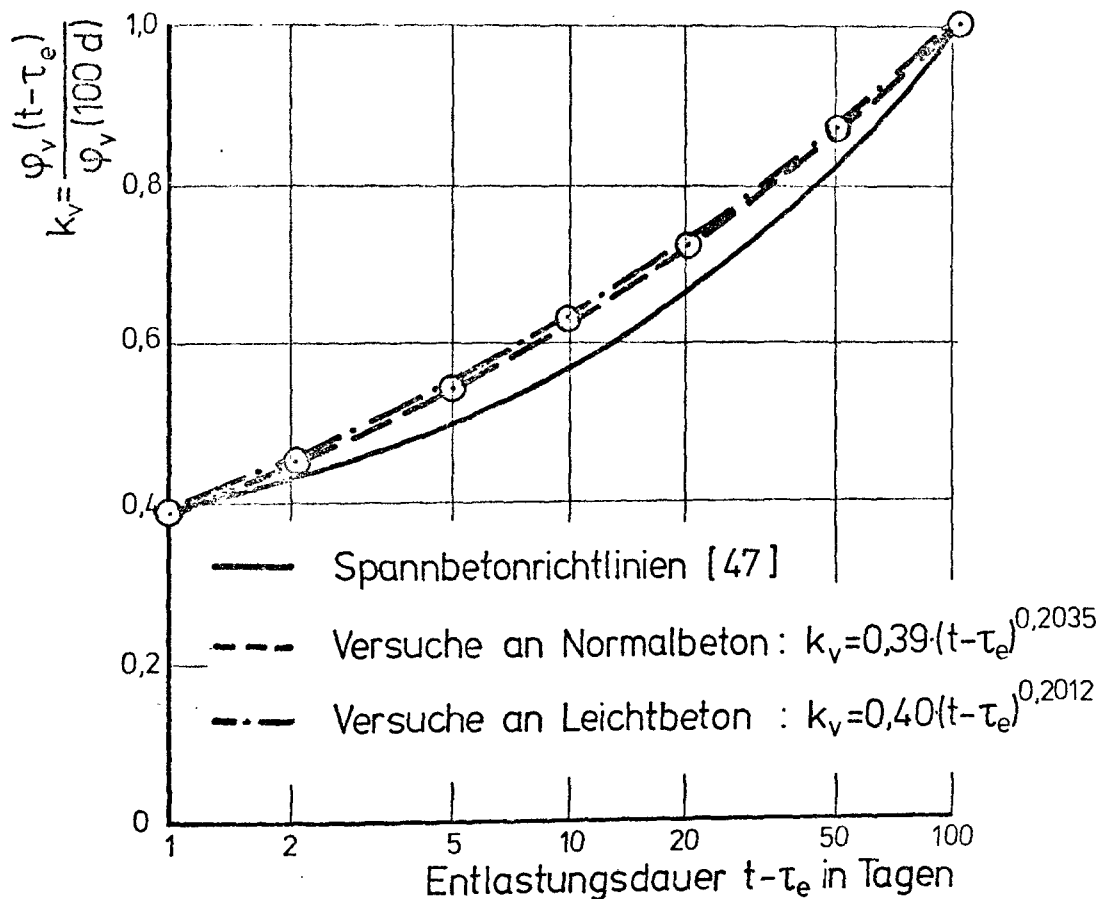


Bild 5-10 Zeitliche Entwicklung der verzögerten Elastizität in den ersten 100 Tagen

Ablauf zu Beginn der Entlastung langsamer erfolgt als bei einer kürzeren Belastungsdauer. Damit wird der Ansatz von Nielsen [113] sowie England und Illston [115] widerlegt, die den zeitlichen Verlauf der verzögerten Elastizität nach Entlastung im Einstufenversuch gemäß der folgenden Beziehung an den Verlauf der Fließverformung koppeln:

$$\varphi_v(t > \tau_e) = \alpha \left(1 - e^{-\frac{\varphi_f(t) - \varphi_f(\tau_e)}{A}} \right) \quad (5-13a)$$

Hierin ist $\alpha = 0,3$ gemäß Nielsen gleichbedeutend mit dem $\varphi_{v\infty}$ der Spannbetonrichtlinien [47], nur daß dort mit 0,4 gerechnet wird.

Da also der zeitliche Ablauf der verzögerten Elastizität relativ unbeeinflußt vom Alter und der Belastungsdauer des Betons ist, kann die verzögerte Elastizität in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\varphi_v(t, \tau) = \varphi_{v\infty}(\tau) \cdot k_v(t - \tau) \quad (5-14)$$

Der Verlauf von $k_v(t - \tau)$ wird wegen der guten Übereinstimmung mit den Spannbetonrichtlinien [47] im Bereich $0 < t - \tau < 100$ Tage (s. Bild 5-10) analog diesem Ansatz angesetzt. Weiter kann davon ausgegangen werden, daß dieser Ansatz auch im Bereich $t - \tau > 100$ Tage experimentell abgesichert ist. In [47] wird von der Existenz eines Grenzwertes der verzögerten Elastizität ausgegangen. Dies steht im Widerspruch zu der von Bažant [112] vertretenen Auffassung, daß die Existenz eines Grenzwertes der verzögerten Elastizität experimentell noch unbewiesen sei. An dieser Stelle soll von der Existenz eines Grenzwertes ausgegangen werden, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Zahlreiche Arbeiten ([4, 13, 105, 113, 115]) rechtfertigen diese Annahme.
2. Die Zunahme der verzögerten Elastizität für $t - \tau_0 > 1$ Jahr ist im Hinblick auf den Anteil am Gesamtkriechen relativ unbedeutend.

Es muß nun jedoch noch überprüft werden, ob der Grenzwert der verzögerten Elastizität unabhängig vom Betonalter ist, wie von der Spannbetonrichtlinie vorausgesetzt wird. Da - wie gezeigt - die Funktion $k_v(t - \tau)$ unbeeinflusst vom Betonalter ist, kann die Alterungsfunktion $\varphi_{v\infty}(\tau)$ in Glg. (5-14) bestimmt werden, ohne daß der Grenzwert selbst bekannt ist. Bei konstant gehaltener Entlastungsdauer $t - \tau_e$ ergibt sich die Alterungsfunktion mittels der Wertepaare τ_e und $\varphi_v(t - \tau_e, \tau_e)$. Es wird bei der Auswertung willkürlich, jedoch ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit, von $t - \tau_e = 28$ Tage ausgegangen. Hierfür liegen umfangreiche Versuchsergebnisse vor. Bild 5-11 zeigt das Ergebnis der Auswertungen, für die außer den bereits für Bild 5-10 verwendeten Arbeiten [25, 64, 65, 66, 92, 119] noch die Versuche von Meyers u. Maity [120], Seki und Kawasumi [116], Rostásy und Alda [73], Mullick [107], sowie Kimishima und Kitahara [22] zur Auswertung herangezogen werden. Die in Bild 5-11 dargestellten Meßpunkte stellen bereits Mittelwerte vergleichbarer Versuche dar. Qualitativ ist eindeutig zu erkennen, daß die verzögerte Elastizität alternd ist. Die Quantifizierung wurde auf folgende Weise vorgenommen. Als Alterungsfunktion wurde eine Hyperbel gemäß Glg. (3-31a) gewählt, da sie die Betonalterung qualitativ am besten zu beschreiben vermag (siehe z. B. [30, 37]). Für drei Wertepaare (τ, φ_v) , die versuchsmäßig gut abgesichert sind, wurden die Konstanten a , b , c bestimmt, die zu der in Bild 5-11 eingezeichneten, affin ver-

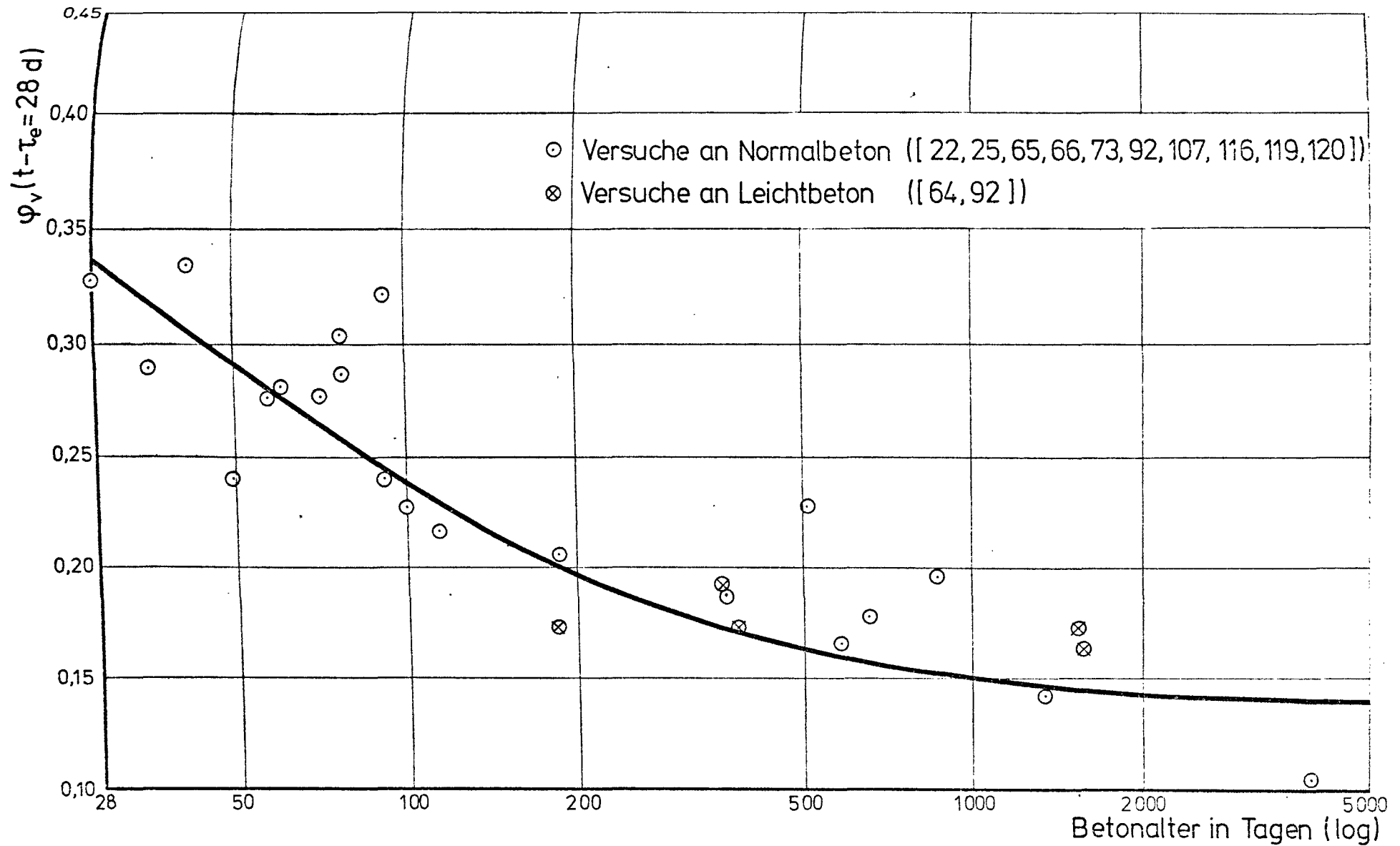


Bild 5-11 Verzögerte Elastizität φ_v bei einer Entlastungsdauer von 28 Tagen in Abhängigkeit vom Betonalter bei Entlastung

zerzten Alterungsfunktion führten:

$$\varphi_v(t-\tau=28d, \tau) = 0,13617 + \frac{14,43317}{43,82716 + \tau} \quad (5-15)$$

Beim Übergang zur normierten Darstellung erhält man:

$$\frac{\varphi_v(28, \tau)}{\varphi_v(28, 28)} = 0,40393 + \frac{42,81403}{43,82716 + \tau} \quad (5-15a)$$

Ersetzt man nun in Glg. (5-15a) $\varphi_v(28, 28)$ durch den Grenzwert $\varphi_{v\infty}(28)$, so erhält man die endgültige Alterungsfunktion der verzögerten Elastizität:

$$\tau > 28d: \varphi_{v\infty}(\tau) = \varphi_{v\infty}(28) \cdot \left(0,40393 + \frac{42,81403}{43,82716 + \tau} \right) \quad (5-16)$$

Bei Annahme von

$$\varphi_{v\infty}(28) = 0,5 \quad (5-17)$$

ergibt sich für sehr alten Beton ($\tau, t - \tau \rightarrow \infty$) unter Berücksichtigung von Glg. (5-14):

$$\varphi_{v\infty}(\infty) \approx 0,2$$

Dieser Wert stimmt recht gut mit dem von Wesche [66] angegebenen Wert $\varphi_{v\infty}(\infty) = 0,18$ überein. Bei einem Vergleich der Alterungsfunktion gemäß Glg. (5-15a) mit dem Alterungsverlauf $k_1(\tau)$ für die Kriechdehnung gemäß DIN 1045 [33] zeigt sich eine überraschende Ähnlichkeit. Bild 5-12 zeigt die Alterung der verzögerten Elastizität in normierter Darstellung.

Zusammenfassend können wir über die verzögerte Elastizität folgendes feststellen:

Die verzögerte Elastizität ist weitgehend unbeeinflusst von den Betonabmessungen (Probekörperform), dem umgebenden Klima, der Austrocknung des Betons und der Betonzusammensetzung. Sie ist proportional der Spannung und strebt nach einer Zeitfunktion, die genügend dem k_v -Verlauf der Spannbetonrichtlinien [47] folgt, einem Grenzwert zu, der aber wieder stark vom jeweiligen Betonalter beeinflusst wird.

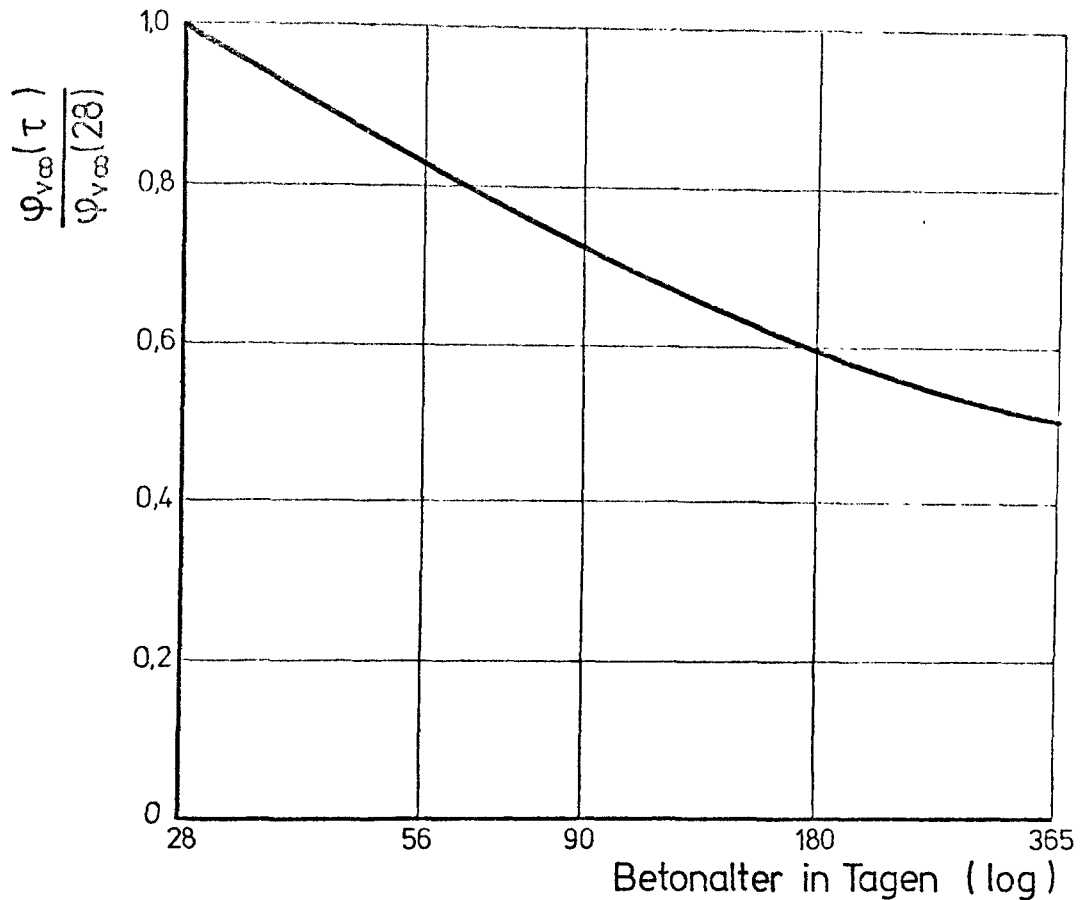


Bild 5-12 Alterungsfunktion der verzögerten Elastizität

Für die Rechnung ist nun noch festzulegen, mit welcher Funktion der $k_v(t-\tau)$ -Verlauf am besten beschrieben werden kann. Vom CEB wird in [94] Glg. (2-16) mit $\alpha_v = 50$ Tage angegeben. Haas [30] nimmt α_v mit 25 Tagen an. Es muß jedoch festgestellt werden, daß der in [47] grafisch dargestellte Verlauf nur mit Glg. (2-18) mathematisch zu erfassen ist. Da jedoch den Retardationszeiten α bzw. τ_{ki} bei variabler Spannung (vor allem auch der Relaxation) im Bereich geringer Belastungsdauer eine entscheidende Rolle zukommt, wurde die Anzahl der Summenglieder auf $n = 5$ erhöht. Auf diese Weise kann der Verlauf der verzögerten Elastizität auch für kleine Werte $t-\tau$ in Übereinstimmung mit dem Experiment (siehe z. B. [73]) dargestellt werden. Bild 5-13 zeigt den Verlauf der verzögerten Elastizität. Damit ergibt sich die verzögert-elastische Dehnung für eine konstante Spannung zu:

$$\frac{E}{\sigma} \epsilon_v(t) = \varphi_v(t, \tau) = \varphi_{v\infty}(\tau) \cdot k_v(t-\tau) \quad (5-18)$$

$$= \varphi_{v\infty}(28) \cdot \left(\alpha_v + \frac{b_v}{c_v + \tau} \right) \cdot \sum_{i=1}^n v_{vi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\alpha_{vi}}} \right)$$

Hierin bedeuten:

$\varphi_{\infty}(28) = 0,5$ - Endzahl der verzögerten Elastizität, wenn der Beton im Alter von 28 Tagen erstmals belastet wird.

$(a_v + \frac{b_v}{c_v + t})$ - Alterungsfunktion gemäß Glg. (5-15a)

$k_v(t-\tau) = \sum_{i=1}^n v_{vi} \cdot (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\alpha_{vi}}})$ - Zeitlicher Verlauf der verzögerten Elastizität mit $\sum v_{vi} = 1$. Die Konstanten v_{vi} und α_{vi} sind der Tabelle 5-4 zu entnehmen.

Tabelle 5-4 Konstanten v_{vi} α_{vi} gemäß k_v -Verlauf der Spannbetonrichtlinien [47]

i-tes Kelvin-Element	v_{vi}	α_{vi}
-	-	Tage
1	0,15057	0,02
2	0,11974	0,29
3	0,11046	7,44
4	0,21150	60,35
5	0,40773	228,62

Für veränderliche Spannung gilt Glg (3-24) in veränderter Indizierung sowie Glg. (5-1).

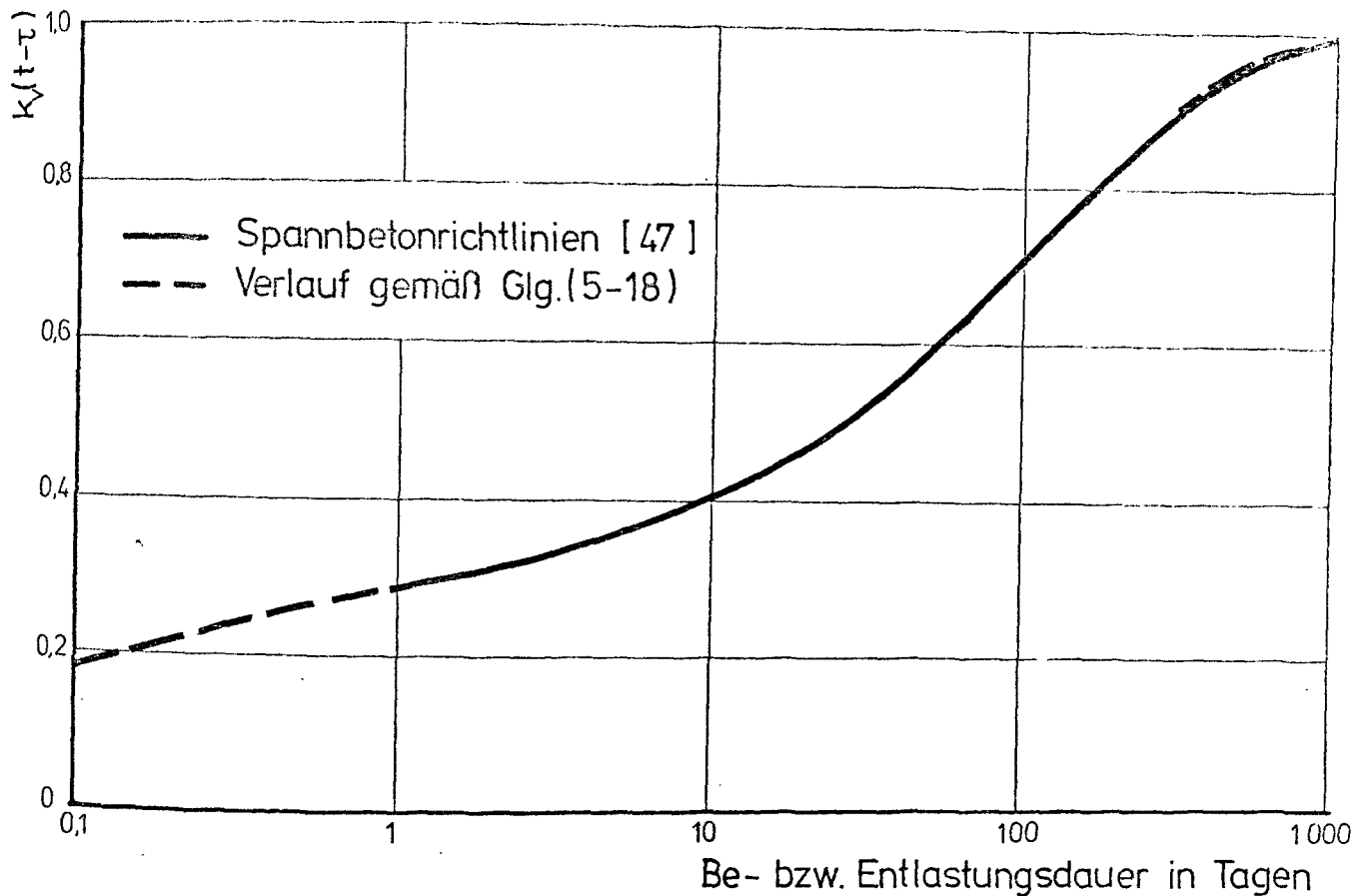


Bild 5-13 Zeitlicher Verlauf der verzögerten Elastizität

5.1.4. Fließen

Wie in Abschnitt 5.1.2 bereits festgestellt wurde, ist die Fließdehnung nicht proportional der sie verursachenden Spannung. Zunächst soll untersucht werden, ob es erlaubt ist, die Spannungsnichtlinearität in der Form

$$\frac{E}{\beta_c} \cdot \dot{\epsilon}_f = \bar{\sigma} \cdot f(\bar{\sigma}) \cdot \dot{\phi}_f \quad \text{mit} \quad (\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial(t)} \quad (5-19)$$

von der Funktion für den zeitlichen Verlauf abzutrennen, d. h. ob der Fließdehnungszuwachs im Zeitintervall durch die nichtlineare, von der Zeit unabhängige, Spannungsfunktion $f(\bar{\sigma})$ mit der Fließgeschwindigkeit verknüpft ist. Der Ansatz gemäß Glg. (5-19), wie er z. B. von Mullick [107] und Warner [111] (siehe Abschnitt 5.1.2) gewählt wurde, läßt sich durch Versuchsergebnisse nicht bestätigen. Als Beweis mögen an dieser Stelle die in Bild 5-14 (a bis d) dargestellten Ergebnisse von Freudenthal und Roll [121], Roll [105], Krüger [122] sowie Komendant, Polivka und Pirtz [65] genügen. Aus Vereinfachungsgründen wurde

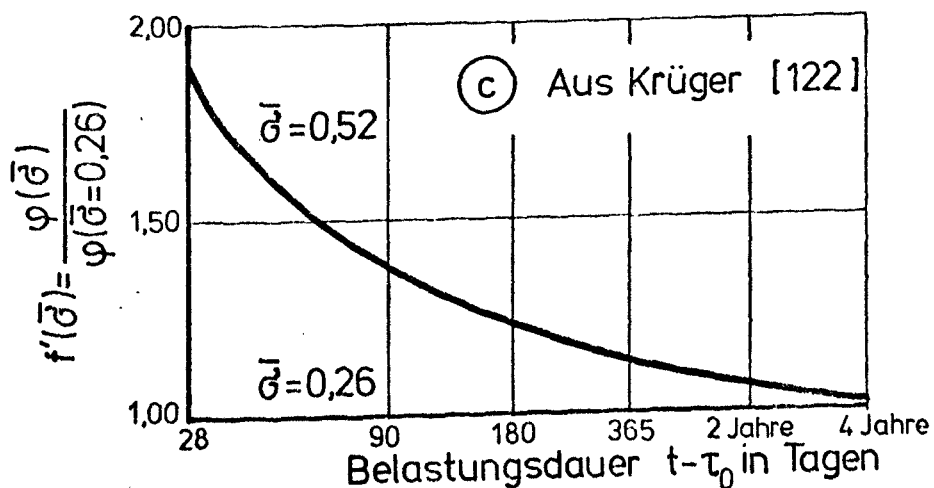
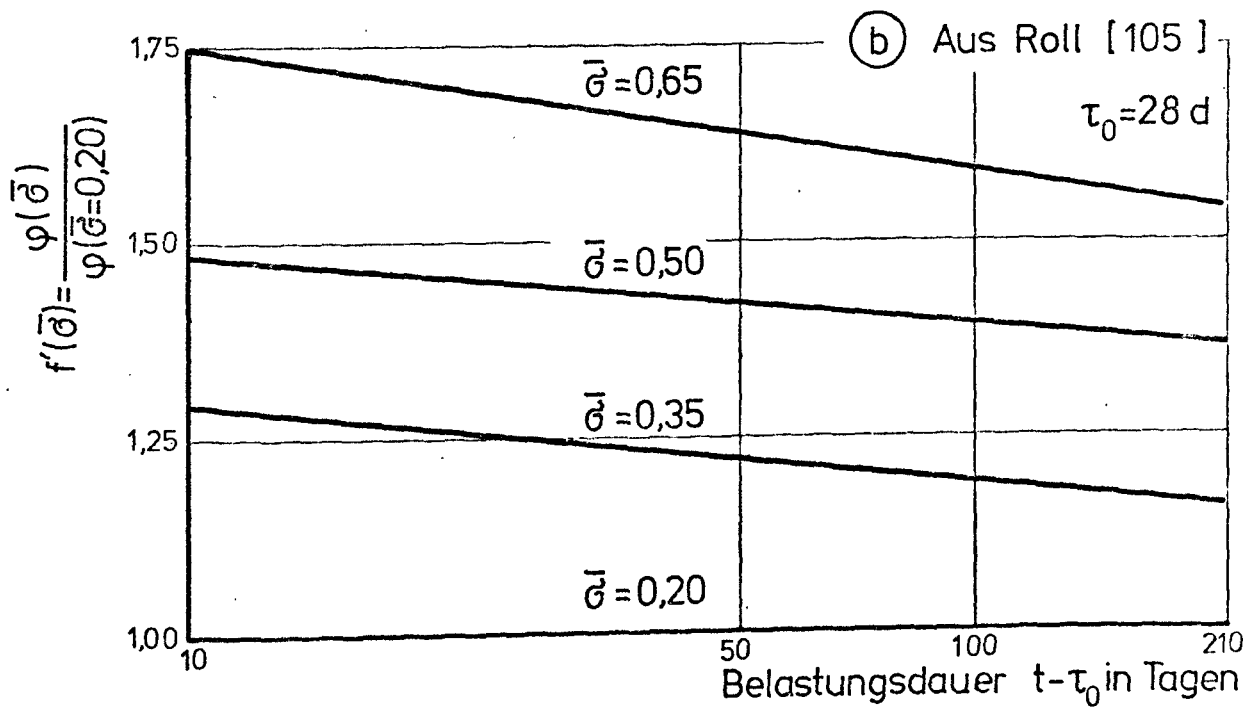
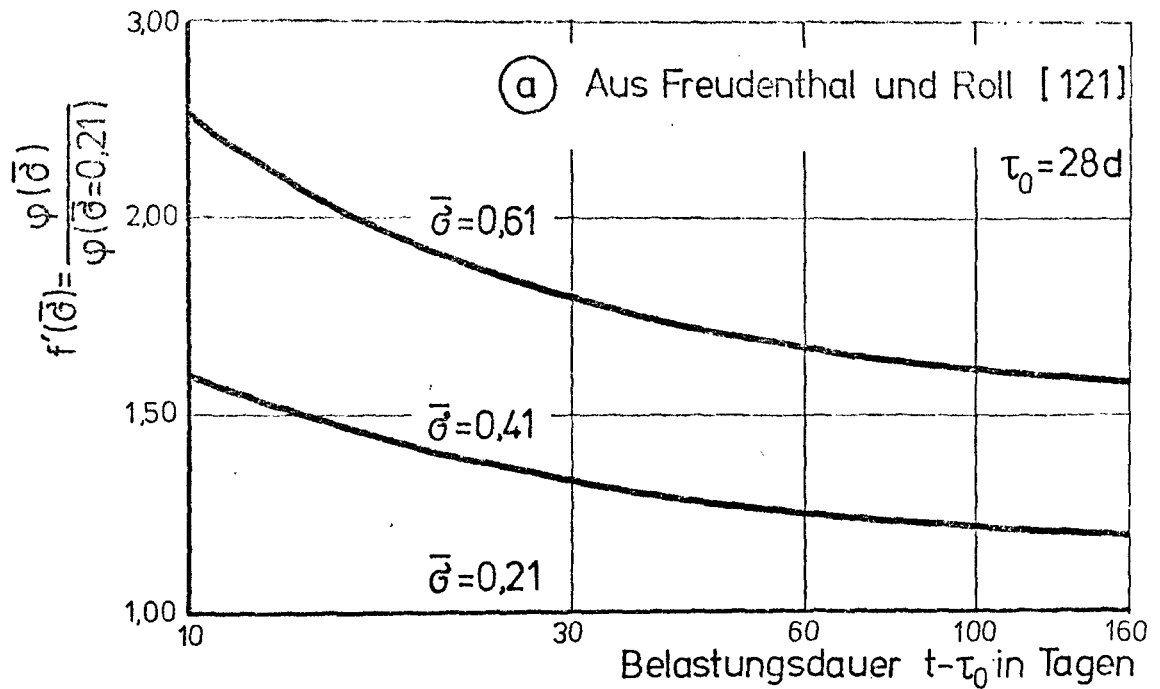


Bild 5-14 Beispiele für abnehmende Nichtlinearität des Kriechens mit zunehmender Belastungsdauer.

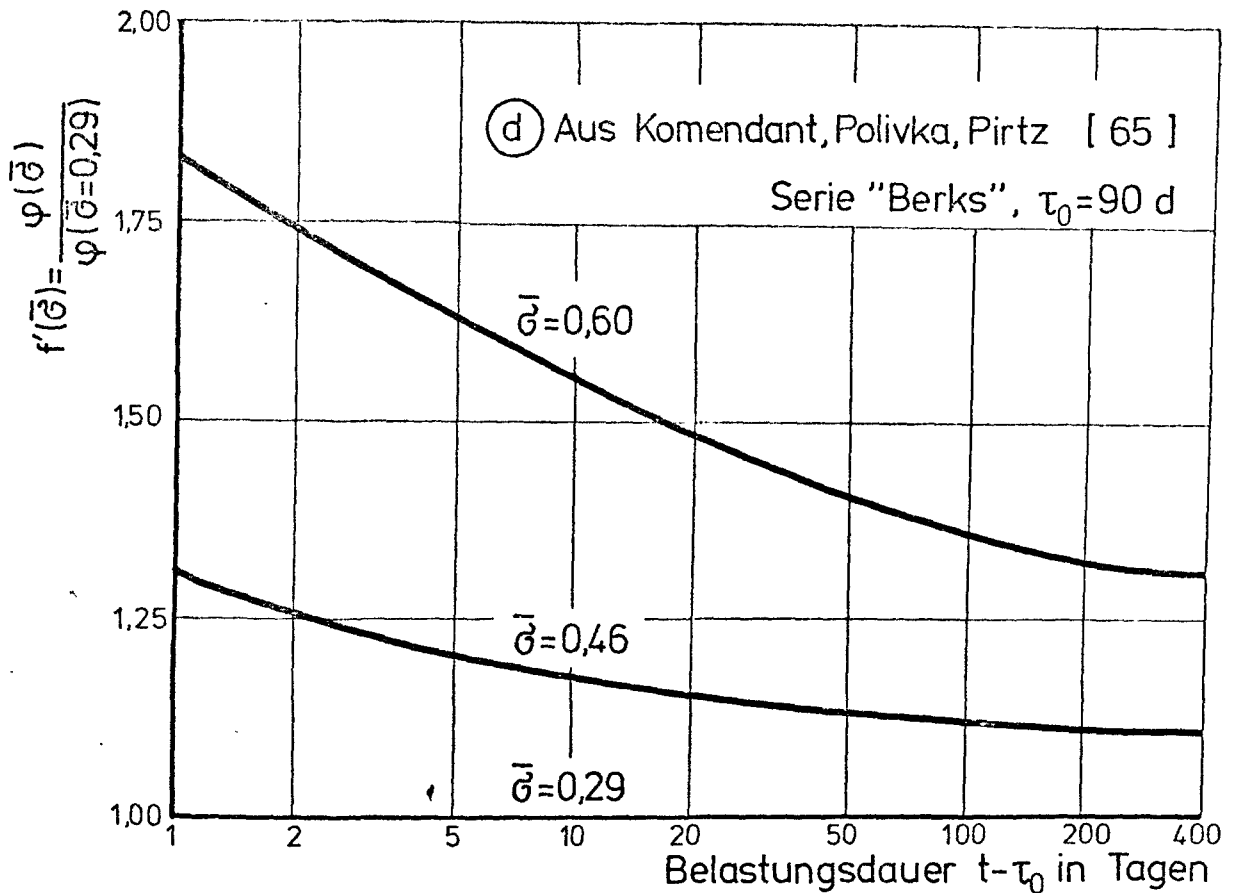


Bild 5-14 Beispiele für abnehmende Nichtlinearität des Kriechens mit zunehmender Belastungsdauer

das Gesamtkriechen betrachtet, das hinsichtlich der Spannungsnichtlinearität qualitativ die gleiche Aussage erlaubt wie für das Fließen allein. Bezieht man, bei vorgegebener Belastungsdauer $t - \tau_0$, die Kriechzahl φ für verschiedene Belastungsgrade auf die Kriechzahl φ des niedrigsten Belastungsgrades $\bar{\sigma}$, so erhält man mit dem Quotienten $f'(\bar{\sigma})$ eine qualitative Aussage über die Beeinflussung der Nichtlinearität durch die Belastungsdauer $t - \tau_0$. Es zeigt sich, daß $f'(\bar{\sigma})$ mit zunehmendem Wert $t - \tau_0$ monoton fällt, d. h. die Nichtlinearität nimmt ab. Damit geht Glg. (5-19) über in

$$\frac{E}{\beta_c} \cdot \dot{\epsilon}_t = \bar{\sigma} \cdot \dot{\varphi}_t(\bar{\sigma}, t - \tau_0) \quad (5-20)$$

Für konstantes $\bar{\sigma}$ liefert die Integration von (5-20)

$$\frac{E}{\beta_c} \cdot \epsilon_t(t) = \bar{\sigma} \cdot \varphi_t(\bar{\sigma}, t - \tau_0) \quad (5-21)$$

Wie die Fließdehnung näherungsweise für den instationären Spannungszustand ermittelt werden kann, soll im folgenden erläutert werden.

Aus Gründen der Anschaulichkeit soll zunächst noch einmal von linearem Kriechen ausgegangen werden.

Bereits in Abschnitt 5.1.1. wurde darauf hingewiesen, daß es sich beim Fließen des Betons um ein "kaltes" Fließen handelt. Dieses Fließen wird in den Spannbetonrichtlinien [47] durch eine einzige Fließfunktion beschrieben und führt auf die äquivalenten Integralbeziehungen für die Fließdehnung infolge variabler Spannungsgeschichte nach der Sprungfunktions- bzw. der Stoßfunktionsmethode (s. Abschnitt 3). Durch den Ansatz "Whitney'schen" Idealfließens wird angenommen, daß das mit zunehmender Belastungsdauer verminderte Fließen nur aus einer Alterung des Betons herrührt. Daraus resultiert die schlechte Übereinstimmung der Kriechdehnungen von in höherem Alter erstmals belasteten Beton in Theorie und Versuch, vor allem im Zeitraum kurz nach Belastungsbeginn (s. Haas [123, 124]). Begreift man jedoch die Fließdehnungen für unterschiedliche Erstbelastungsalter als die Differenz zwischen gemessener Kriechdehnung und gerechneter bzw. nach Entlastung im Einstufenversuch gemessener verzögerter Elastizität, so trifft man das tatsächliche Fließverhalten des Betons wesentlich genauer. Mit diesem Vorgehen erhält man das Fließen als den "Irrtum" des Superpositionsprinzips des Affinen Kriechens bei der Bestimmung der Dehnung nach Entlastung. Die so erhaltene Fließfunktion beschreibt die Fließdehnung in der Form einer mechanischen Alterung, ähnlich dem physikalisch-chemischen Reifen des Betons. Dieses Verhalten läßt sich mathematisch anschaulich durch Anwendung der Stoßfunktionsmethode für variable Spannung in der folgenden Form fassen:

$$E \cdot \epsilon_f(t) = F(\tau_0) \cdot \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial [k_f(\tau - \tau_0)]}{\partial \tau} d\tau \quad (5-22)$$

Streng genommen müßte statt $\partial \tau$ bzw. $d\tau$ geschrieben werden: $\partial(\tau - \tau_0)$ bzw. $d(\tau - \tau_0)$. Da die Fließfunktion jedoch nur für $\tau > \tau_0$ definiert ist, wird die Schreibweise in (5-22) beibehalten. Damit ergeben sich die Fließdehnungen für konstante Spannung in Abhängigkeit von der Belastungsdauer aus den durch den Faktor $F(\tau_0)$ affin verzerrten Einheitsfließkurven:

$$E \cdot \epsilon_f(t) = F(\tau_0) \cdot [\sigma(t) - \sigma(\tau_0)] \quad \text{mit } k_f(\tau_0 - \tau_0) = k_f(0) = 0 \quad (5-23)$$

$F(\tau_0)$ stellt so in Analogie zu φ_{f_0} der Spannbetonrichtlinien [47] ein Fließpotential in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Erstbelastung dar und wird für zunehmende Werte von τ_0 durch eine monoton fallende Alterungsfunktion beschrieben. Unter der Annahme einer identischen Alterungsfunktion für $\varphi_{v\infty}(\tau)$ und $F(\tau_0)$ ergibt sich eine Parallele zur DIN 1045 [33]. Dort ist diese Alterungsfunktion durch $k_1(\tau)$ gegeben.

Die Berechtigung des Affinitätsansatzes (5-23) wurde für gleiche Werte σ bzw. $\bar{\sigma}$ mit den Versuchen von Komendant, Polivka und Pirtz [65] für 3 Werte τ_0 (28, 90 und 270 Tage) überprüft und bestätigt gefunden. Bekräftigt wird der Ansatz (5-23) auch von den Fließkurven der Münchener Versuche, die in Bild 5 der Arbeit von Rüscher, Jungwirth und Hilsdorf [4] dargestellt sind. Hier deutet sich auch bereits an, daß für die Zeitfunktion von Glg. (5-23) mit dem Ansatz einer Potenzfunktion analog Glg. (2-10) eine sehr gute Beschreibung der gemessenen Verläufe zu erzielen ist, wie Bild 5-15 zeigt. Bei Wahl eines Potenzgesetzes geht Glg. (5-23) über in

$$E \cdot \varepsilon_f(t) = F(\tau_0) \cdot G \cdot (t - \tau_0)^c \quad (5-24)$$

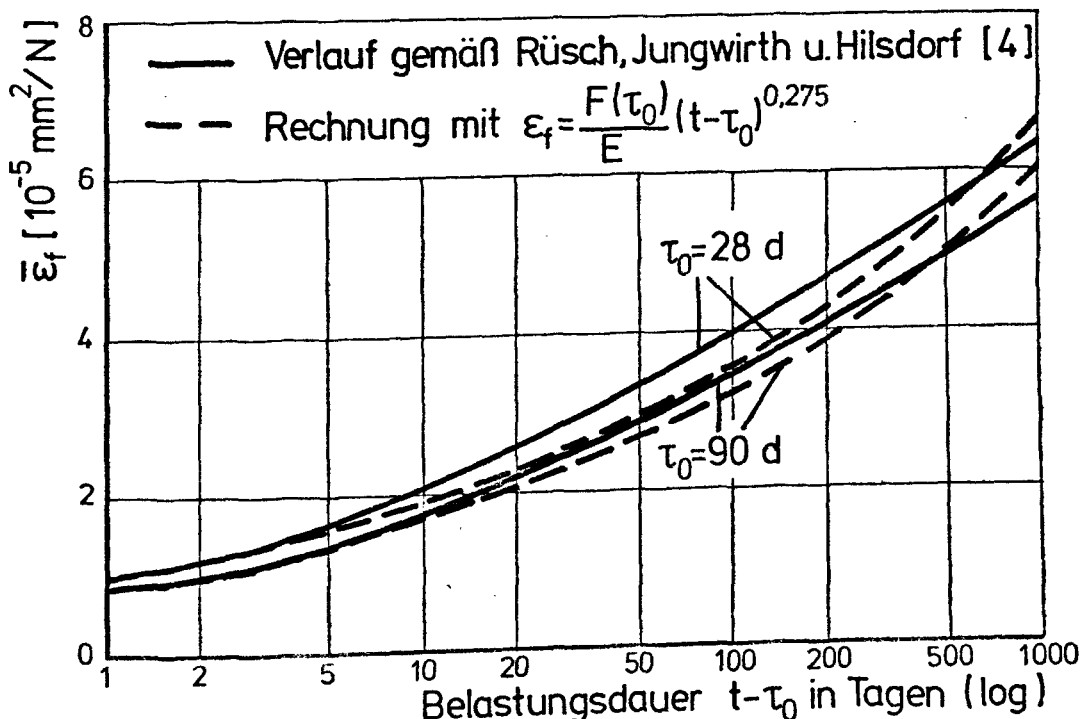


Bild 5-15 Annäherung von Fließfunktionen für unterschiedliches Belastungsalter gemäß affinem Fließen nach Glg. (5-24)

Es muß nun noch untersucht werden, wie die Fließfunktionen für unterschiedliches $\sigma = \bar{\sigma} \cdot \beta_c$ aufgebaut sind. Wie bereits eingangs dieses Abschnittes festgestellt wurde, muß φ_f eine Funktion der Belastungsdauer und des Belastungsgrades sein. Damit geht Glg. (5-24) über in:

$$\frac{E}{\beta_c} \cdot \epsilon_f(t) = F(\tau_0) \cdot \bar{\sigma} \cdot f(\bar{\sigma}) \cdot (t - \tau_0)^{g(\bar{\sigma})} \quad (5-25)$$

Für den Sonderfall, daß die Spannungsnichtlinearität unabhängig von der Belastungsdauer (Zeit) ist, erhält man analog den Ansätzen von Warner [111], Mullick [107], Gamble und Thomass [110] sowie Gamble [125] - dort allerdings für das gesamte Kriechen:

$$\frac{E}{\beta_c} \cdot \epsilon_f(t) = F(\tau_0) \cdot \bar{\sigma} \cdot f(\bar{\sigma}) \cdot (t - \tau_0)^c \quad (5-26)$$

Wenn man berücksichtigt, daß die Linearität des verzögert-elastischen Anteil des Kriechdehnung an der Nichtlinearität des Fließens nur quantitativ etwas ändert, kann man in den Glg. (5-25) und (5-26) $\epsilon_f(t)$ durch $\epsilon_k(t)$ ersetzen. Die verschiedene Aussage der beiden Gleichungen läßt sich dann an-

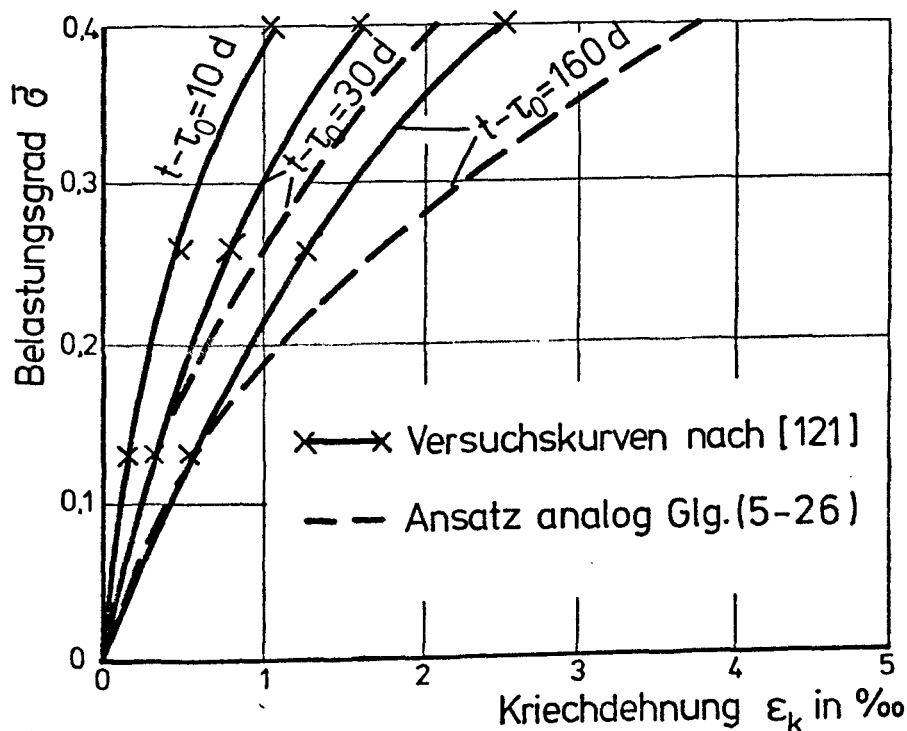


Bild 5-16 Vergleich von zeitabhängiger und zeitunabhängiger Nichtlinearität von Kriechen und Belastungsgrad

schaulich mit den Isochronen des Kriechens darstellen. Das in Bild 5-16 dargestellte Beispiel ist der Arbeit von Freudenthal und Roll [121] (Bild 10) entnommen. Die Versuchskurven lassen sich nur durch einen zeitabhängigen

Nichtlinearitätsansatz gemäß Glg. (5-25) beschreiben. Wendet man indes den zeitunabhängigen Ansatz $C = \text{const.}$ an, so erhält man die gestrichelt dargestellten Verläufe, wenn man die Kurve $\epsilon_k(t - \tau_0 = 10 \text{ d})$ im Verhältnis der für $\bar{\sigma} = 0,13$ gemessenen Kriechdehnungen affin verzerrt. Man erkennt, daß man das Kriechen für hohe Belastungsgrade $\bar{\sigma}$ mit zunehmender Belastungsdauer mit Glg. (5-26) erheblich überschätzen würde. In anderer Schreibweise ergibt Glg. (5-25):

$$\varphi_f(\bar{\sigma}, t - \tau_0) = \epsilon_f(t) \cdot \frac{E}{\bar{\sigma} \cdot \beta_c} = F(\tau_0) \cdot f(\bar{\sigma}) \cdot (t - \tau_0)^{g(\bar{\sigma})} \quad (5-27)$$

Mittels dieser Gleichung wurden die Versuche von Komendant, Polivka und Pirtz [65] ausgewertet. Zur Ermittlung des Fließanteils wurde vom gemessenen Kriechanteil die verzögerte Elastizität mit Hilfe von Glg. (5-18) abgetrennt.

Die Approximation für die Ermittlung der Werte $F(\tau_0) \cdot f(\bar{\sigma})$ und $g(\bar{\sigma})$ in Glg. (5-27) wurde - wie bei allen anderen Approximationen auch - nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate durchgeführt. Das Bestimmtheitsmaß r^2 betrug $0,91 < r^2 < 1,00$. Bild 5-17 zeigt in doppelt-logarithmischer Darstellung das Ergebnis. Die Fließfunktionen haben dann die Form von Geraden. Augenfällig ist der Einfluß des Belastungsgrades, der charakterisiert ist durch die unterschiedlichen Schnittpunkte mit der Ordinatenachse ($F(\tau_0) \cdot f(\bar{\sigma})$) und die verschiedenen Steigungen der Geraden ($g(\bar{\sigma})$). Die Tendenz ist eindeutig: für steigende Werte $\bar{\sigma}$ nehmen die Werte $F(\tau_0) \cdot f(\bar{\sigma})$ zu und die Werte $g(\bar{\sigma})$ ab.

Ein gleichartiges Ergebnis liefert Bild 5-18, in dem Ergebnisse der unveröffentlichten Münchener Versuche ausgewertet wurden. Zur Ermittlung des Belastungsgrades $\bar{\sigma}$ wurde, da die Zylinderdruckfestigkeit nicht bestimmt werden war, von der Beziehung

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\beta_c} = \frac{\sigma}{0,8 \cdot \beta_w} \quad (5-28)$$

ausgegangen, was als gute Näherung angesetzt werden kann (siehe z. B. Lewandowski [129]). Im Gegensatz zu den Versuchen von Komendant, Polivka und Pirtz [65], die an versiegelten Proben durchgeführt wurden, waren die Probekörper der Münchener Versuche unversiegelt. Durch diese beiden Versuchsprogramme kann man die Unterschiede zwischen Grundkriechen (basic creep [65]) bzw. Trocknungskriechen (drying creep [Münchener Versuche]) aufzeigen. Diese Aufteilung des Kriechens, erstmals von Ali und Kesler [109] vorgenommen, wird in

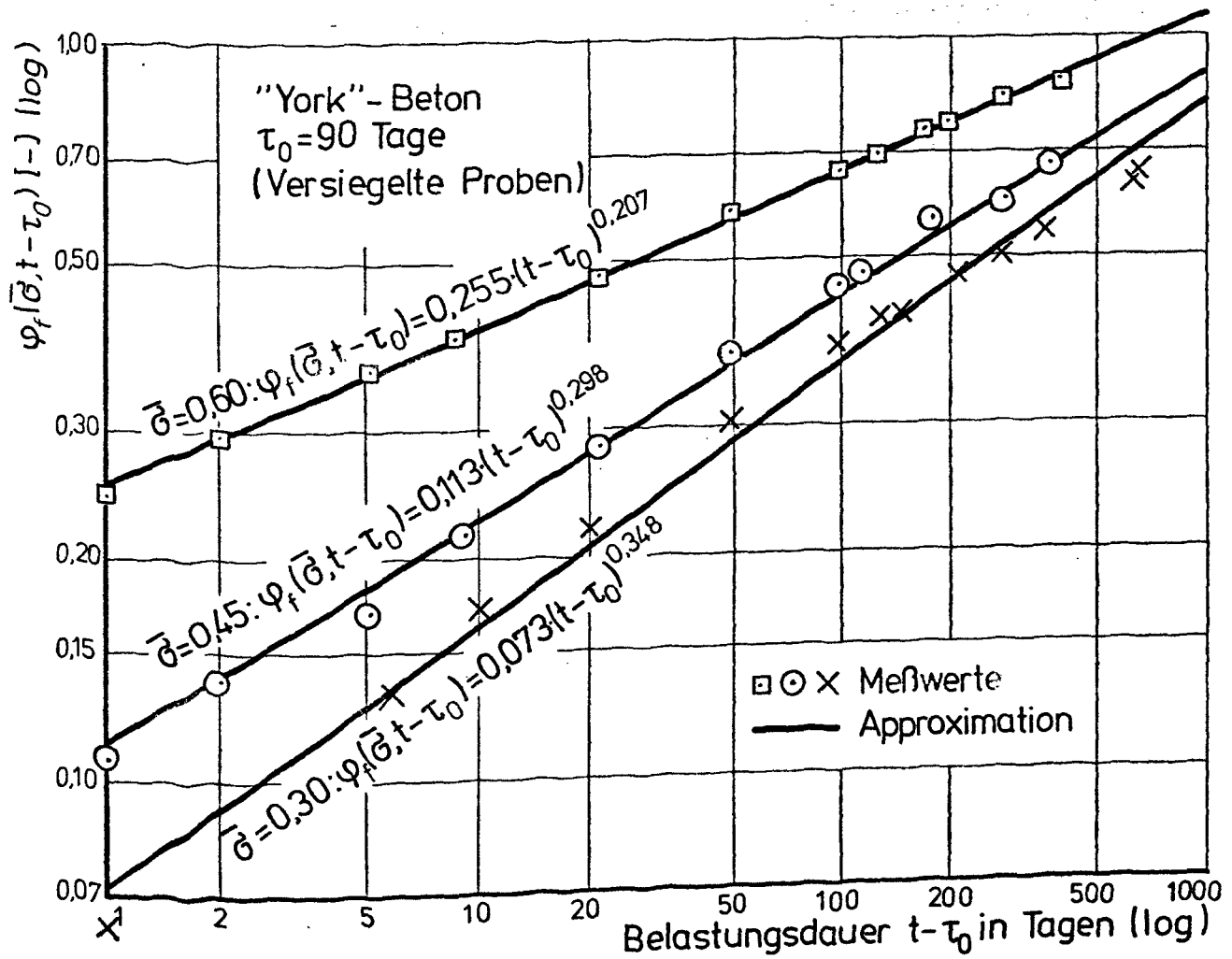
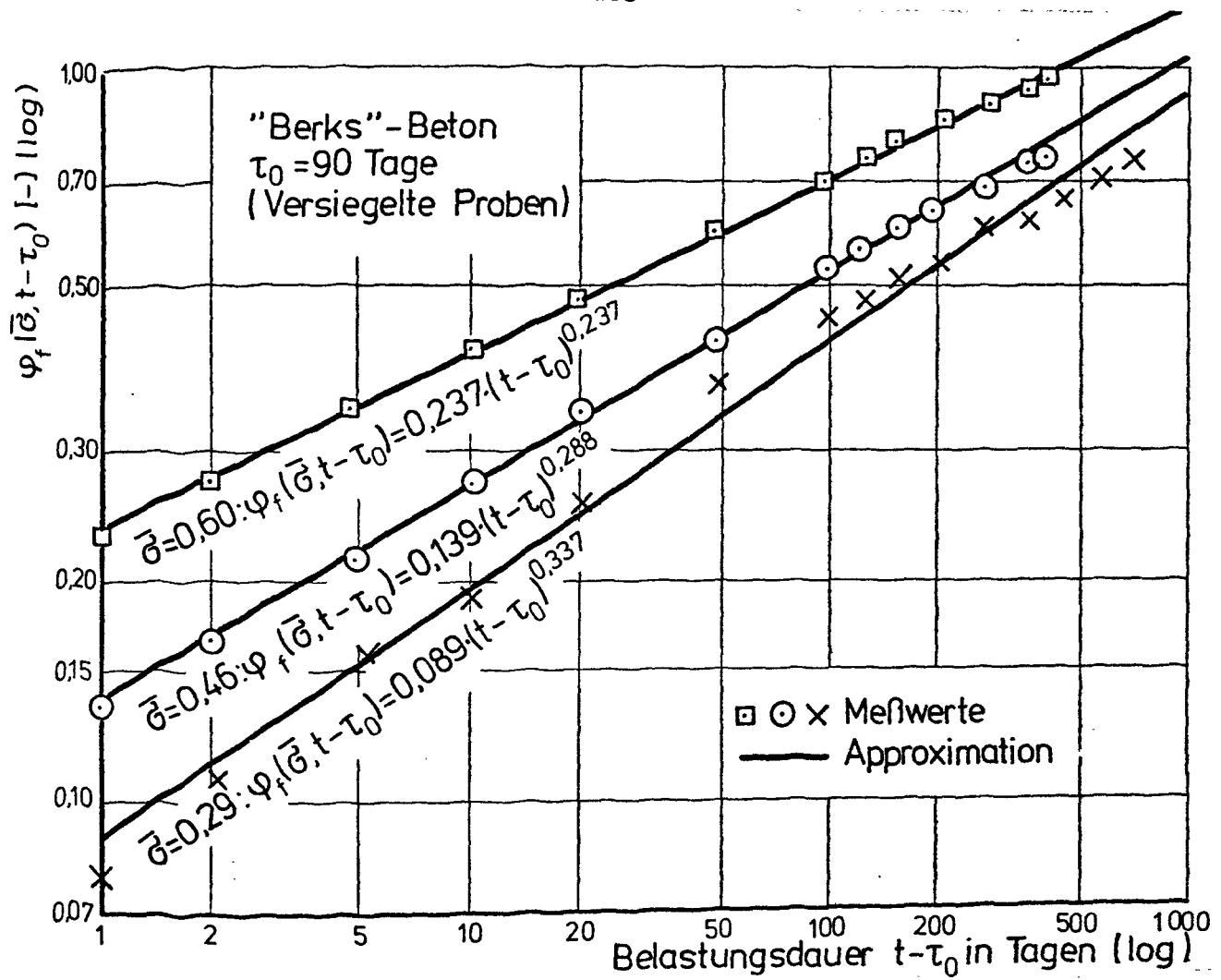


Bild 5-17 Beeinflussung der Fließfunktion durch den Belastungsgrad $\bar{\sigma}$
 (Komendant, Polivka und Pirtz [65])

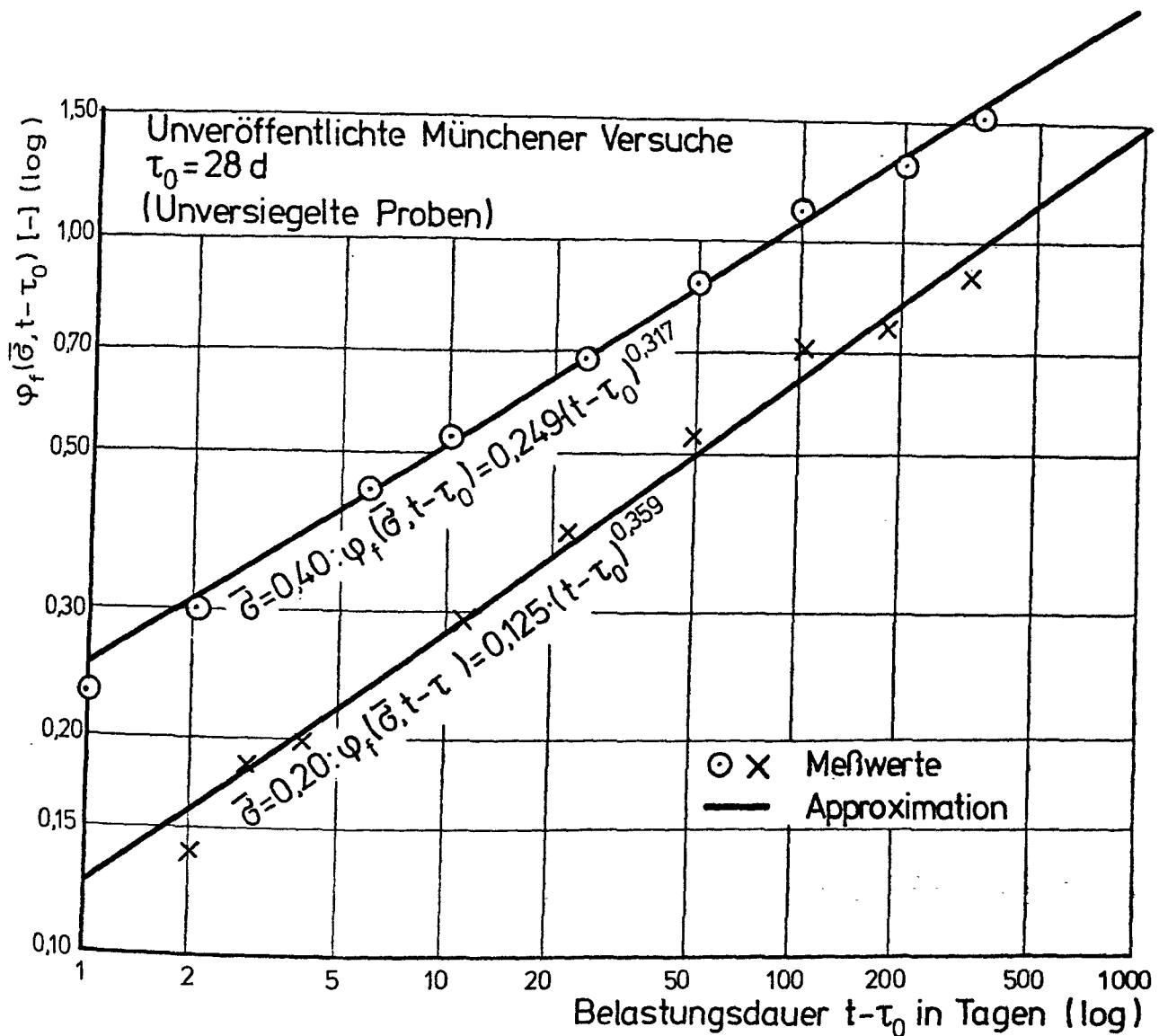


Bild 5-18 Beeinflussung der Fließfunktion durch den Belastungsgrad $\bar{\sigma}$ nach unveröffentlichten Münchener Versuchen

den Spannbetonrichtlinien [47, 128] durch die wirksame Dicke d_w erfaßt. Man erkennt beim Vergleich der beiden Bilder deutlich das gleichartige Verhalten bei beiden Kriecharten. Da andererseits die verzögerte Elastizität (siehe Abschnitt 5.1.3.) vom Feuchtezustand des Betons unbeeinflußt ist, ist es mechanisch korrekt, von Grund- bzw. Trocknungsfließen zu sprechen.

Ähnliche Ergebnisse wie in den Bildern 5-17 und 5-18 erhält man, wenn man die Versuche von Roll [105], Mullick [107], Tsui [88], Mickleborough [89], Kwong [90], Mehmehl und Kern [84] sowie Chang und Kesler [126] auswertet.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden in den Bildern 5-17 und 5-18 die Fließfunktionen nur im Bereich einer Belastungsdauer $t - \tau_0 \geq 1$ Tag dargestellt. Eine Überprüfung der Fließfunktionen bis hinab zu einer sehr geringen Belastungsdauer von rd. 0,001 Tagen = 1,4 Minuten ergab jedoch ebenfalls eine

hervorragende Übereinstimmung. Diese wichtige Erkenntnis wurde auch schon von Wittmann und Setzer [16] sowie Bažant [3] für die Kriechfunktion gewonnen.

Manche Forscher, wie z. B. Rüscher, Jungwirth und Hilsdorf [4], kritisieren den Ansatz einer Potenzfunktion für das Kriechen bzw. Fließen, weil sich hier nach kein Kriech- bzw. Fließwert ergibt. Die Frage der Existenz eines Kriech- bzw. Fließgrenzwertes ist jedoch bis heute noch nicht experimentell schlüssig beantwortet worden. Einer solchen Forderung kann jedoch ggf. durch eine Veränderung der Glg. (5-27) analog der Glg. (2-10a) Genüge getan werden. Die Wahl einer Potenzfunktion für das Fließen erscheint daher gerechtfertigt, zumal Versuchsergebnisse von Browne und Blundell [127] ihre Gültigkeit bis zu einer Belastungsdauer von mehreren Jahren bestätigt haben. Außerdem stellt sie von allen möglichen mathematischen Ansätzen für eine Zeitfunktion im Hinblick auf die rechnerische Behandlung das Optimum dar, vor allem dann, wenn das Kriechen über einen Zeitbereich von mehreren Zehnerpotenzen von Tagen untersucht werden soll.

Es soll nun die Alterungsfunktion des Fließpotentials $F(\tau_0)$ untersucht werden. Unterstellt man, daß die Alterungsfunktion der DIN 1045 [33] durch eine ausreichende Anzahl von Versuchen abgesichert ist und berücksichtigt man ihre gute Übereinstimmung mit der Alterungsfunktion der verzögerten Elastizität (Glg. 5-15a), so erscheint es zweckmäßig, diese Alterungsfunktionen auch für die Alterung des Fließpotentials $F(\tau_0)$ zu übernehmen. Bestätigt wird diese Annahme, wenn man das Restfließvermögen gemäß den Spannbetonrichtlinien [47, 128] in Abhängigkeit vom Erstbelastungsalter τ_0 ermittelt, das durch den Grenzwert der jeweiligen Restfließfunktion bestimmt ist. Die so erhaltenen Kurven sind in gewisser Weise ebenfalls Alterungsfunktionen. Wie aus Bild 5-19 zu ersehen ist, fällt das Restfließen für große Werte τ_0 sehr stark ab. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Fließfunktion in den Spannbetonrichtlinien für $\tau \rightarrow \infty$ einen Grenzwert besitzt, so daß sich für einen sehr spät erstmals belasteten Beton kein Fließen mehr ergibt. Dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen von Wesche, v. Berg und Schrage [66], die selbst bei einem über 8 Jahre alten Beton noch ein Fließen feststellten, das bei einer Belastungsdauer von 2 Jahren ebenso groß war wie die verzögerte Elastizität. Aus diesen Erwägungen heraus erscheint der Ansatz gemäß Glg. (5-15a) für mittlere Werte d_w für die Alterung des Fließpotentials $F(\tau_0)$ sinnvoll. Für eine geringere wirksame Dicke (etwa $d_w = 10$ cm) werden wegen der damit verbundenen stärkeren und schnelleren Alterung die Konstanten der Alterungsfunktion (5-15a) variiert.

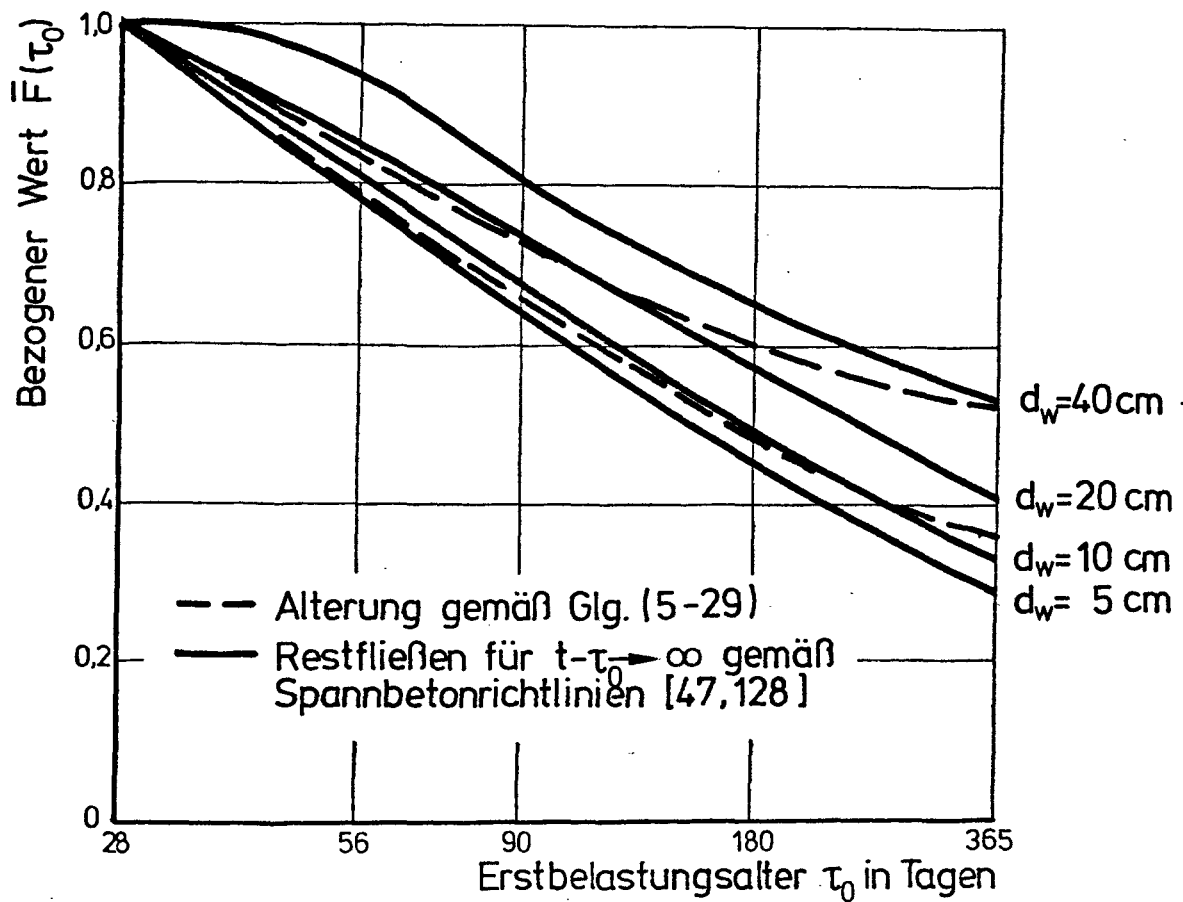


Bild 5-19 Vergleich Alterungsfunktion für das Fließpotential und Restfließen ($k_z = 1,0$) gemäß den Spannbetonrichtlinien [47, 128]

Man erhält so die Alterungsfunktion für das Fließen:

$$F(\tau_0) = F(28) \cdot \left(a_f(d_w) + \frac{b_f(d_w)}{c_f(d_w) + \tau_0} \right) \quad (5-29)$$

Tabelle 5-5 Konstanten der Alterungsfunktion für das Kriechpotential (Glg. (5-29))

Wirksame Dicke	Konstanten für die Alterung des Fließens		
	a_f	b_f	c_f
cm	—	Tage	—
gering ($d_w \approx 10 \text{ cm}$)	0,19431	65,03709	52,72223
mittel ($d_w \approx 40 \text{ cm}$)	0,40393	42,81403	43,82716

Mit den Konstanten gemäß Tabelle 5-5 ergibt sich der in Bild 5-19 graphisch (strichliert) dargestellte Verlauf für $F(\tau_0)$. Eine Parallele läßt sich hier auch zu dem von Haas [30] angesetzten geringeren Altern für größere d_w -Werte ziehen.

Als letztes müssen nun noch die Funktionen $f(\bar{\sigma})$ und $g(\bar{\sigma})$ bestimmt werden. Bei Betrachtung der Bilder 5-17 und 5-18 scheinen sich die Approximationsgeraden in einem Punkt zu schneiden. Anschaulich bedeutet dies, daß zu diesem Zeitpunkt die Fließfunktionenschar unabhängig vom Belastungsgrad ist. Mathematisch gesehen heißt das, daß für einen bestimmten Zeitpunkt $t - \tau_0 = T$ das Differential von Glg. (5-27) nach dem Belastungsgrad verschwinden muß. Ab diesem Zeitpunkt T ist das Fließen dann proportional der Spannung zu setzen. Führt man die Differentiation durch, so erhält man:

$$\frac{\partial [k_f(\bar{\sigma}, t - \tau_0)]}{\partial \bar{\sigma}} = 0 = \dot{f} \cdot T^g + f \cdot T^g \cdot g \cdot \ln T \quad \text{mit } (\dot{}) = \frac{\partial ()}{\partial \bar{\sigma}} \quad (5-30)$$

oder nach einigen Umformungen:

$$g(\bar{\sigma}) = \int -\frac{\dot{f}}{f} \cdot \frac{1}{\ln T} d\bar{\sigma} = -\frac{1}{\ln T} \cdot \ln f(\bar{\sigma}) + c \quad (5-31)$$

Für die Funktion $f(\bar{\sigma})$ kann z. B. ein Polynom angesetzt werden (s. Mullick [107]). Da dies zu einem relativ komplizierten Aufbau für $g(\bar{\sigma})$ führt, wurde für $f(\bar{\sigma})$ eine mathematisch leichter zu handhabende Funktion gewählt, die den gleichen Zweck erfüllt:

$$f(\bar{\sigma}) = e^{b\bar{\sigma}} \quad (5-32)$$

Damit erhält man für die Abhängigkeit des Exponenten von Glg. (5-27) die Gleichung

$$g(\bar{\sigma}) = c - \frac{b}{\ln T} \cdot \bar{\sigma} \quad (5-33)$$

Die Konstanten b , c und T sind nun aus Versuchsergebnissen zu bestimmen.

Die Festlegung des Zeitpunktes T , also derjenigen Belastungsdauer $t - \tau_0$, bei der die Nichtlinearität des Fließens verschwindet, kann relativ willkürlich erfolgen, da der Wert von T ziemlich groß ist. Dies erkennt man, wenn man versucht, die Geraden in den Bildern 5-17 und 5-18 zum Schnitt zu bringen. Es wird daher gesetzt:

$$T \cong 10\,000 \text{ Tage}$$

(5-34)

Für die Bestimmung der Konstanten b und c können grundsätzlich zwei Wege beschritten werden. Beiden gemeinsam ist die Bestimmung der Konstanten b , die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf Grund der Versuche [84, 88, 89, 90, 105, 107, 126] durchgeführt wurde ($t - \tau_0 = 1$ Tag). Man erhält in guter Näherung:

$$b = 3,0$$

(5-35)

Bei der ersten Methode zur Bestimmung von c wird mittels der Versuche von Komendant, Polivka und Pirtz [65], in denen $\bar{\sigma}$ in einem großen Bereich variiert wurde, im überbestimmten Gleichungssystem (5-33) die Konstante c approximiert. Bei einem Variationskoeffizienten von $v = 3,7\%$ erhält man $c = 0,432$.

Bei der zweiten Methode wird c mittels der Versuche von Engelke [25] für Normalbeton und von Rostásy, Teichen und Alda [64] für Leichtbeton bestimmt. In diesen Versuchen war die Belastungsdauer besonders groß (ca. 4 Jahre), so daß die Exponenten $g(\bar{\sigma})$ der approximierten Fließfunktionen sehr gut abgesichert sind. So läßt sich die Konstante c bestimmen, obwohl der Belastungsgrad in diesen Versuchen nicht variiert wurde. Für Normalbeton ergab sich nach Engelke für feuchtgehaltene Proben $c = 0,421$ und für 65 % rel. Luftfeuchtigkeit $c = 0,354$. Damit wurde die von vielen Forschern (z. B. Bažant [3]) geäußerte Auffassung bestätigt, daß bei relativ geringen Probekörperabmessungen das Trocknungsfließen für große Belastungsdauer rascher abklingt (kleinerer c -Wert) als in den übrigen Fällen wie z. B. bei Wasserlagerung oder konserviertem Beton (Komendant [65]).

Um nun einen Vergleich mit den Spannbetonrichtlinien [47, 128] durchführen zu können, sollen die Werte $F(\tau_0)$ in Glg. (5-27) für bestimmte Randbedingungen in Übereinstimmung mit den φ_{fo} -Werten in [47, 128] gebracht werden. Da es bei der Erstellung der Richtlinien ein Hauptanliegen war, das Fließen nach großer Belastungsdauer annähernd richtig zu erfassen, wird diese Übereinstimmung für $t - \tau_0 \approx 1000$ Tage durchgeführt. Unter Berücksichtigung des Linearansatzes im Hinblick auf die Spannung in den Richtlinien wird folgende Vereinbarung getroffen: Die Werte $F(\tau_0)$ liefern für ein Erstbelastungsalter $\tau_0 = 28$ Tage nach einer Belastungsdauer $t - \tau_0 = 1000$ Tage für einen Belastungsgrad $\bar{\sigma} = 0,25$ das Restfließen gemäß den Spannbetonrichtlinien [47, 128]. Dies stellt im Hinblick darauf, daß die meisten Kriechversuche in der Literatur

einen ähnlichen Belastungsgrad aufweisen und daß die Richtlinien auf der Basis solcher Versuche aufgestellt wurden, eine gute Näherung dar. In der Tabelle 5-6 sind die auf Grund dieser Arbeitshypothese ermittelten Konstanten der Fließfunktion (5-27) zusammengestellt. Das wirksame Betonalter wurde für schneller erhärtende Zemente ($k_z > 1,0$) in Form einer Abminderung von $F(28)$ bei geringer wirksamer Dicke berücksichtigt.

Leichtbeton nimmt hinsichtlich des Fließanteiles auf Grund der Auswertung der Versuche [64] eine gewisse Sonderstellung ein. Die Konstante c wurde hier zu 0,423 ermittelt. Dies erscheint relativ hoch, wenn man bedenkt, daß die verwendeten Probekörper nicht versiegelt waren. Da andererseits die Konstante b wegen mangelnder Versuchsergebnisse an Leichtbeton vom Normalbeton übernommen werden mußte, kann ggf. hierin die Ursache für den relativ hohen c -Wert zu suchen sein.

Hinsichtlich der Spannungsnichtlinearität wird bei Trocknungsfließen und Grundfließen von gleichen Verhältnissen ausgegangen, da die von Bažant, Osman und Thonguthai [3] geäußerte Auffassung, daß das Trocknungskriechen in stärkerem Maße spannungsnichtlinear sei als das Grundkriechen, von der Auswertung der oben erwähnten Versuche nicht bestätigt werden konnte.

Die endgültige Fließfunktion ergibt sich also zu:

$$\varphi_f(\bar{\sigma}, t - \tau_0) = F(\tau_0) \cdot e^{b\bar{\sigma}} \cdot (t - \tau_0)^{c - \frac{b}{\ln T} \bar{\sigma}} \quad (5-36)$$

Eine grafische Darstellung der $\frac{1}{F(\tau_0)}$ -fachen Fließfunktionen ist in Bild 5-20 gegeben. Man erkennt deutlich die stärkere Neigung der Fließgeraden für das Grundfließen.

In Bild 5-21 ist qualitativ die Abnahme der Spannungsnichtlinearität des Fließens dargestellt. Es ist vergleichbar mit Bild 5-14, jedoch ist die Anfangsnichtlinearität wegen des abgespaltenen Linearanteils der verzögerten Elastizität wesentlich stärker ausgeprägt.

Tabelle 5-6 Konstanten der Fließfunktion (5-27), errechnet aus den Fließfunktionen der Spannbetonrichtlinien [128]. Randbedingungen für die Berechnung:
Temperatur $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\tau_0 = 28$ Tage, Belastungsdauer $t - \tau_0 = 1000$ Tage,
Belastungsgrad $\bar{\sigma} = 0,25$.

Wirksame Dicke	Fließen gemäß Spannbetonrichtlinien				Fließen gemäß Glg. (5-27)					
	φ_{fo}	$\varphi_f(1000) - \varphi_f(28)$ für $k_z =$			b	c	T	$F(28)^{1)}$ für $k_z =$		
		1,0	2,0	3,0				1,0	2,0	3,0
	-	-	-	-	-	-	Tage	-	-	-
gering ($d_w = 10\text{ cm}$)	0,8	0,70	0,59	0,52	3,0	0,35	10^4	0,052	0,044	0,038
	1,3	1,14	0,96	0,85				0,084	0,071	0,063
	2,0	1,76	1,48	1,30				0,130	0,109	0,096
	2,7	2,38	2,00	1,76				0,176	0,148	0,130
Mittel ($d_w = 40\text{ cm}$)	0,8	0,51			3,0	0,42	10^4	0,023		
	1,3	0,83						0,038		
	2,0	1,28						0,058		
	2,7	1,73						0,079		

1)

$$F(28) = \frac{\varphi_f(1000) - \varphi_f(28)}{b \cdot \bar{\sigma} \cdot e^{-\frac{b}{\ln T} \cdot \bar{\sigma}}} \quad (\text{siehe auch Glg. (5-29)})$$

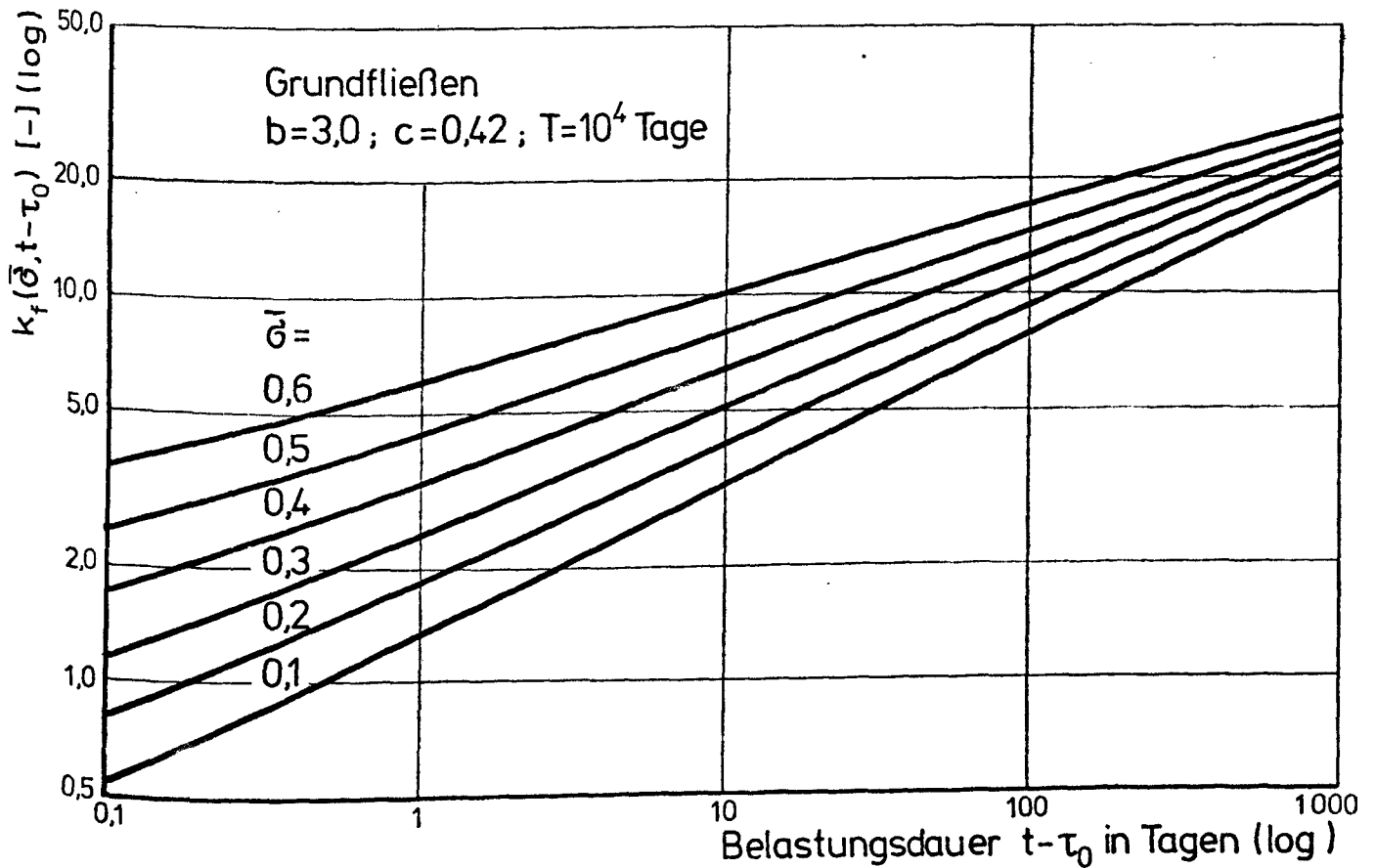
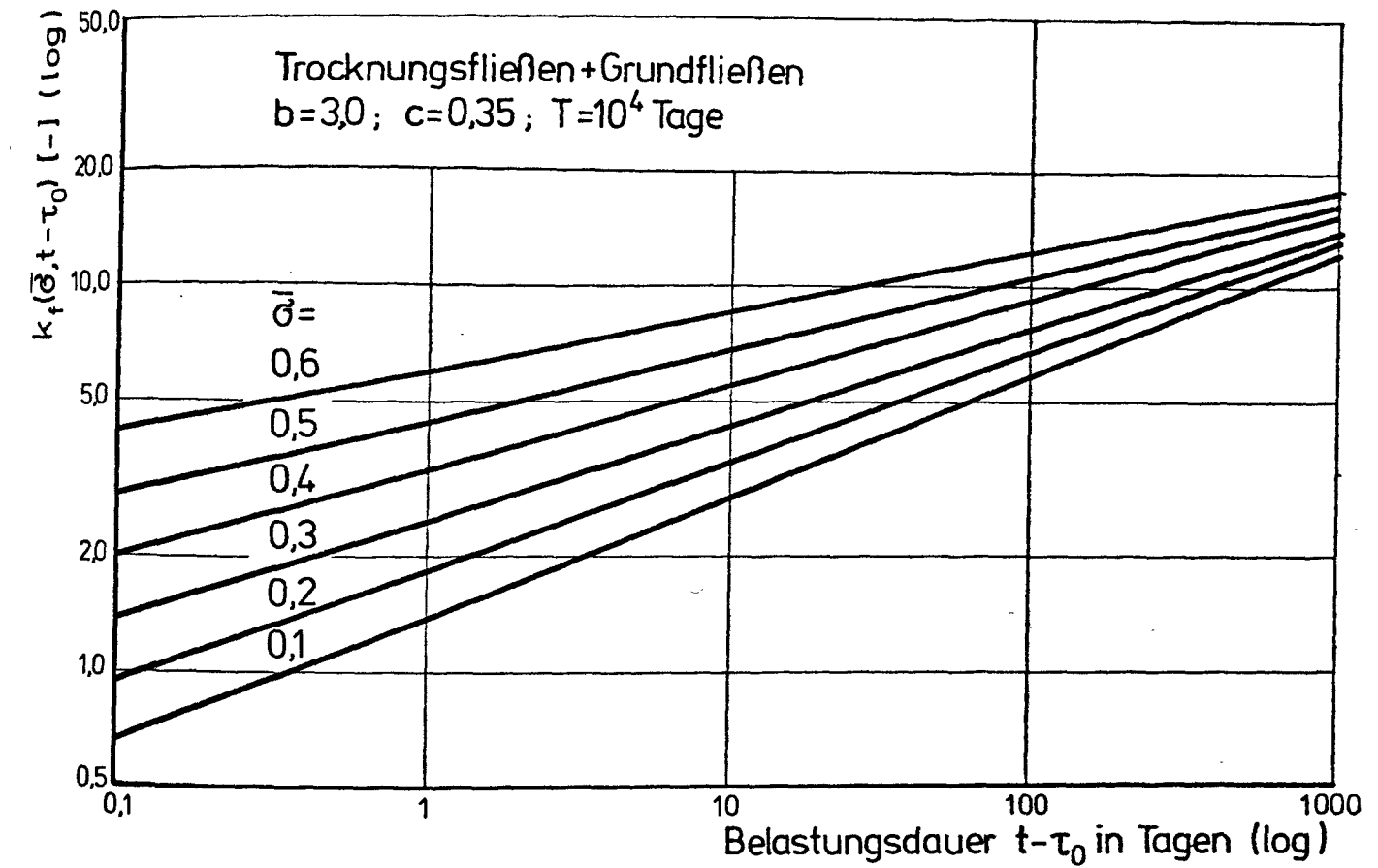


Bild 5-20 Zeitlicher Verlauf des Fließens für Trocknungsfließen und Grundfließen sowie Grundfließen allein.
 Parameter: Belastungsgrad $\bar{\sigma}$

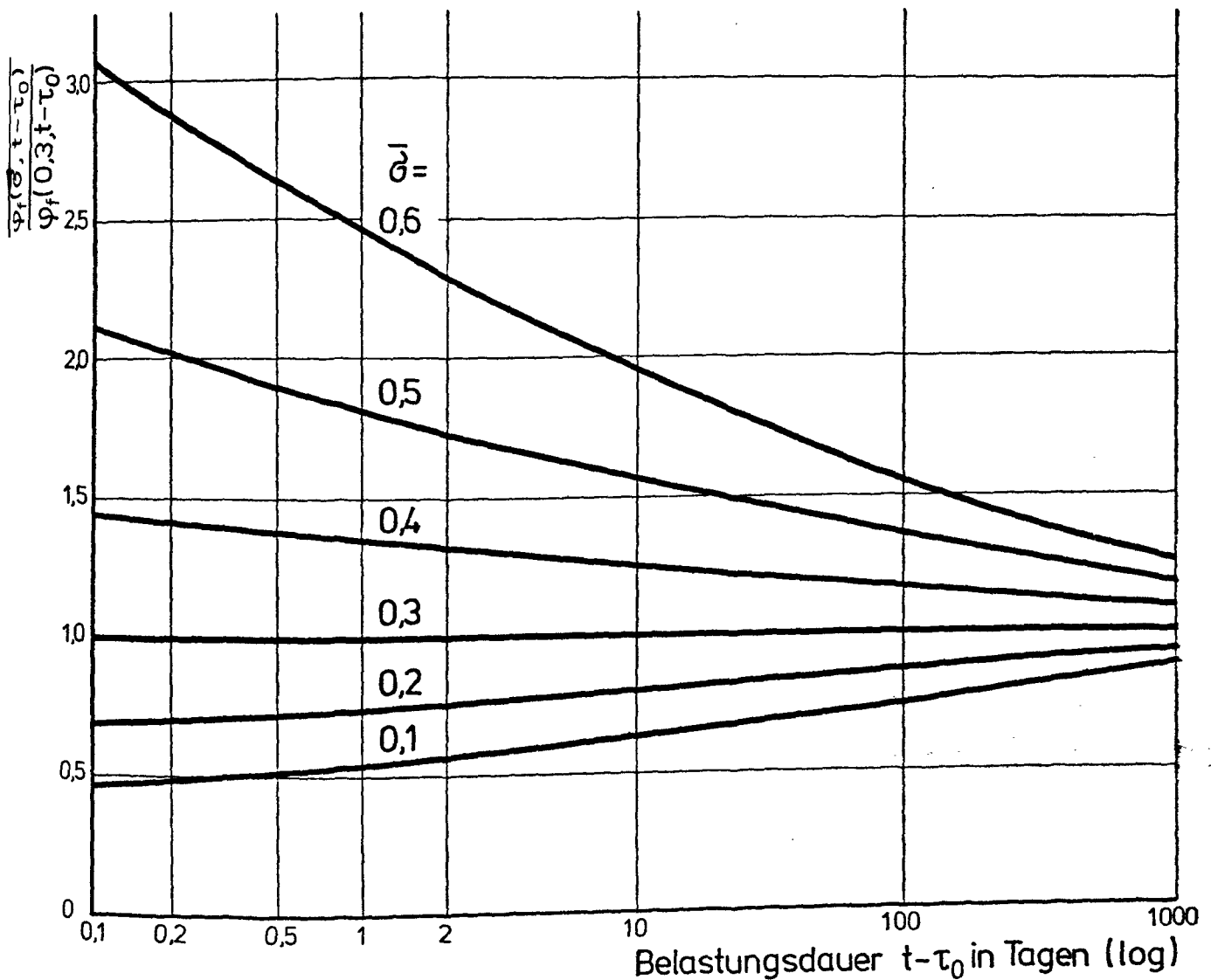


Bild 5-21 Abnahme des nichtlinearen Fließens in Abhängigkeit von der Belastungsdauer (Grund- und Trocknungsfließen)

Es ist nun noch zu untersuchen, wie die Integralgleichung (5-22) aufgestellt wurde. Prinzipiell befindet sich der Forscher immer in der mißlichen Lage, vom unter konstanter Spannung gemessenen und somit bekannten Kriechverhalten des Betons durch Aufbau eines theoretischen Ansatzes das Verhalten unter zeitlich veränderlicher Spannung durch Rechnung bestimmen zu müssen. Hierbei müssen zwangsläufig gewisse Annahmen getroffen werden. Dabei gehen alle bisher bekannten Theorien (auch die in Abschnitt 3.1.1. beschriebenen) davon aus, daß bei der Differentiation der gemessenen Kriechfunktion für konstante Spannung:

$$E \cdot \epsilon_k(t) = f(\sigma, t, \tau) = \sigma \cdot \varphi(t, \tau),$$

(5-37)

die nötig ist, um die anschließende Integration nach der Zeit für variable

Spannung $\sigma = \sigma(t)$ durchführen zu können, $\sigma(t)$ bzw. $\sigma(\tau)$ und τ als formal unabhängige Variable zu betrachten sind. So erhält man

$$\frac{\partial f(\sigma, t, \tau)}{\partial \tau} = \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (5-38)$$

Nur dann verschwindet das zweite Glied der Differentiation nach der Kettenregel $\frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \varphi(t, \tau)$.

Eine Beeinflussung der Kriechdehnung für einen bestimmten Zeitpunkt t durch frühere Spannungen wird in der Integralgleichung des Produktansatzes durch die spezielle Wahl von $\varphi(t, \tau)$ erreicht. Man erhält das Vererbungsintegral

$$E \cdot \epsilon_k(t) = - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial [\varphi_m(\tau) \cdot k(t-\tau)]}{\partial \tau} d\tau \quad (5-39)$$

Wichtigstes Kennzeichen ist die partielle Reversibilität der Kriechdehnung, was man durch Auswertung von (5-39) für den Einstufenversuch erkennt. Ist die Kriechdehnung oder nur das Fließen irreversibel, so ist im letzteren Fall:

$$E \cdot \epsilon_f(t) = - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial [\varphi_f(t) - \varphi_f(\tau)]}{\partial \tau} d\tau \quad (5-40)$$

An den Integralen (5-39) und (5-40) ändert sich auch nichts, wenn Kriechen oder Fließen nichtlinear abhängig von der Spannung sind. Es ergibt sich:

$$E \cdot \epsilon_k(t) = - \int_{\tau_0}^t \bar{f}(\sigma(\tau)) \cdot \frac{\partial [\varphi_m(\tau) \cdot k(t-\tau)]}{\partial \tau} d\tau \quad (5-39a)$$

bzw.

$$E \cdot \epsilon_f(t) = \int_{\tau_0}^t \bar{f}(\sigma(\tau)) \cdot \frac{\partial [\varphi_f(\tau)]}{\partial \tau} d\tau \quad (5-40a)$$

für den Fall, daß die Nichtlinearitätsfunktion vom zeitlichen Verlauf getrennt werden kann. Die Nichtlinearitätsbedingung dabei lautet:

$$\bar{f}(\sigma_1) + \bar{f}(\sigma_2) \neq \bar{f}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5-41)$$

Bei der partiellen Integration von (5-40a) ist daher z. B. bei

$$\bar{f}(\sigma) = \sigma \cdot f(\bar{\sigma}) \quad (5-42)$$

nach der Kettenregel zu differenzieren.

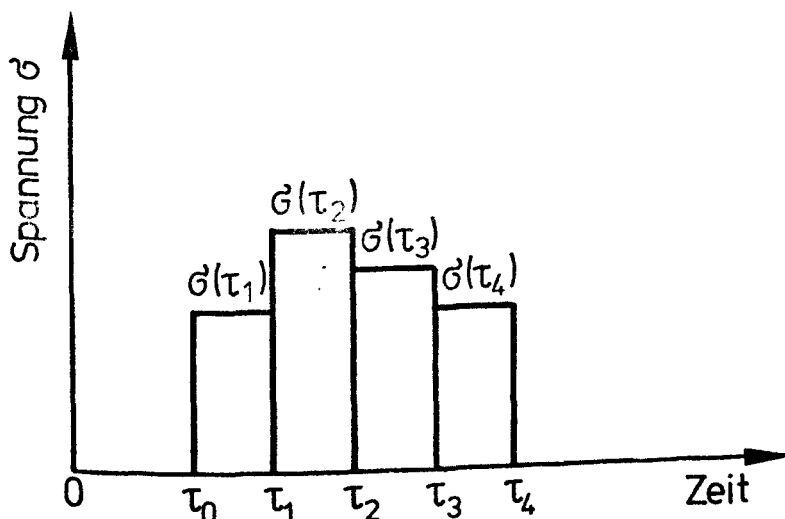
Alle Integralgleichungen ((5-39) und (5-40)) erfassen, wie bereits in Abschnitt 3 festgestellt wurde, das reale Verhalten des Betons auf Grund gewisser Vereinfachungen nicht richtig.

Der Ansatz in Glg. (5-1) stellt eine Verbindung von beiden Integralgleichungen dar. Es wird von der Möglichkeit der Separierbarkeit von Fließen und verzögerter Elastizität durch Rechnung ausgegangen, und man erhält unter Ein-schluß der zeitunabhängigen elastischen Dehnung die Integralgleichung (5-1). Zum Fließintegral sind jedoch noch einige Bemerkungen zu machen.

Auf Grund der elastisch-viskoelastischen Analogie erhält man bei Linearität von Dehnung (Kriech-) und Spannung für jedes Superpositionsprinzip ein identi-sches Ergebnis. Im vorliegenden Fall muß jedoch infolge der speziellen Nicht-linearität erst ein Superpositionsprinzip definiert werden. Hierzu erscheint das modifizierte Superpositionsprinzip von Stafford (siehe Lockett [130]) besonders geeignet. Es besagt, daß jede zusätzliche Last durch Superposition so behandelt wird, daß die vorherige Last komplett entfernt und die neue höhere Gesamtlast sofort aufgebracht wird. Da definitionsgemäß das Fließen nur irreversible Dehnungen liefert, ist die Fließdehnung im Zeitintervall nur von der momentanen Spannungshöhe und dem zeitlichen Abstand vom Bela-stungsbeginn abhängig. Bei Auswertung einer Spannungsgeschichte gemäß Bild 5-22 erhält man also mit den Bezeichnungen dieses Abschnittes mit $t = \tau_k$ bei bestimmten Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\beta_c} \varepsilon_f(\dot{\sigma}(t), t) = & \varepsilon_{fa} + \bar{\sigma}(\tau_1) \cdot [\varphi_f(\bar{\sigma}(\tau_1), \tau_1 - \tau_0) - \varphi_f(\bar{\sigma}(\tau_1), \tau_0 - \tau_0)] \\ & + \bar{\sigma}(\tau_2) \cdot [\varphi_f(\bar{\sigma}(\tau_2), \tau_2 - \tau_0) - \varphi_f(\bar{\sigma}(\tau_2), \tau_1 - \tau_0)] \\ & \vdots \\ & + \bar{\sigma}(\tau_k) \cdot [\varphi_f(\bar{\sigma}(\tau_k), \tau_k - \tau_0) - \varphi_f(\bar{\sigma}(\tau_k), \tau_{k-1} - \tau_0)] \end{aligned} \quad (5-43)$$

Daraus ergibt sich als Summenausdruck mit $\tau_k = n \cdot \Delta\tau$



$$\frac{E}{\beta_c} \cdot \varepsilon_f(\bar{\sigma}(t), t) = \varepsilon_{fa} + \sum_{n=1}^k \bar{\sigma}(n \cdot \Delta\tau) \cdot \frac{[\varphi_f(\bar{\sigma}(n \cdot \Delta\tau), n \cdot \Delta\tau - \tau_0) - \varphi_f(\bar{\sigma}(n \cdot \Delta\tau), (n-1) \cdot \Delta\tau - \tau_0)]}{\Delta\tau} \Delta\tau \quad (5-44)$$

Bei der Grenzwertbetrachtung $\Delta\tau \rightarrow 0$ stellt der Bruch in der Summe eine partielle Ableitung nach $\partial\tau$ dar. Dabei ist $\bar{\sigma}$ in Analogie zu den Glg. (5-38) bis (5-40) als Konstante zu betrachten. Für die ebenfalls beim Grenzübergang $\Delta\tau \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$ auftretende Integration ist jedoch $\bar{\sigma}$ überall, wo es auftritt, als Funktion von τ aufzufassen. Damit erhält man für die Ermittlung der Fließdehnung bei variabler Spannungsgeschichte unter Berücksichtigung der Glg. (5-36) die folgende Integralgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\beta_c} \cdot \varepsilon_f(t) &= F(\tau_0) \int_{\tau_0}^t \bar{\sigma}(\tau) e^{b\bar{\sigma}(\tau)} \cdot \left(c - \frac{b}{\ln T} \cdot \bar{\sigma}(\tau)\right) \cdot (\tau - \tau_0)^{c-1 - \frac{b}{\ln T} \cdot \bar{\sigma}(\tau)} d\tau \\ &= -F(\tau_0) \int_{\tau_0}^t \bar{\sigma}(\tau) \frac{\partial[\varphi_f(\bar{\sigma}, t - \tau_0) - \varphi_f(\bar{\sigma}, \tau - \tau_0)]}{\partial\tau} d\tau \end{aligned} \quad (5-45)$$

Zusammenfassend läßt sich über das Fließen folgendes feststellen:

Das Fließen des Betons stellt eine irreversible Dehnung dar. Es wird beeinflusst durch das umgebende Klima, die Austrocknung des Betons und die Betonabmessungen (Probekörperform). Das Fließen für unterschiedlichen Zeitpunkt des Beginns einer Spannungsgeschichte ist gekennzeichnet durch das Fließpotential $F(\tau_0)$, das infolge der chemisch-physikalischen Alterung mit zunehmendem Alter τ_0 monoton abnimmt. Die Beziehung zwischen Spannung und Fließen ist nichtlinear. Bei einmal erfolgtem Beginn der Belastungsgeschichte stellt der Beton infolge mechanischer Alterung ein zeitverfestigendes Material dar, d. h. die momentane Fließgeschwindigkeit ist abhängig von der Belastungsdauer. Sie ist außerdem nichtlinear abhängig vom Belastungsgrad $\bar{\sigma}$, und zwar dergestalt, daß die Nichtlinearität des Fließens mit zunehmender Belastungsdauer abnimmt. Bezüglich der Erfassung des zeitlichen Ablaufs des Fließens stellt der Ansatz einer Potenzfunktion ein Optimum dar.

5.2. Stoffmechanische Bedeutung des neuen Ansatzes

Beton ist makroskopisch ein heterogener Stoff, der zusammengesetzt ist aus den festkörperartigen Zuschlägen und dem stark viskosen Zementgel. Das mechanische Verhalten heterogener Stoffe ist durch die Anteile der Kompositmaterialien bestimmt. Beim, statistisch gesehen, isotropen Baustoff Beton wird das Deformationsverhalten sehr wesentlich durch die kontinuierlich verteilte Phase, das Zementgel, bestimmt und entspricht insofern im wesentlichen dem Verhalten einer Flüssigkeit. Da sich im Verlauf der Verformung ein stetig fortschreitendes Blockieren des ursprünglich viskosen Verhaltens zeigt, nähert sich das Deformationsverhalten mit zunehmender Belastungsdauer mehr und mehr dem Verhalten eines Festkörpers. Hierbei sind beim "technisch" amorphen Beton die Wechselwirkungskräfte zwischen den verschiedenen Phasen bei der Bestimmung der Materialeigenschaften ebenso wichtig wie innerhalb der einzelnen Phase. Die Kräfte zwischen den Phasen sind Oberflächenkräfte, die die Adhäsion zwischen den festen Zuschlägen und der viskosen Zementphase bewirken. Der relative Einfluß der zwei Phasen wird daher nicht nur durch das Volumenverhältnis, sondern auch durch die Beziehung zwischen den inneren Kräften jeder Phase und ihren Wechselwirkungskräften bestimmt.

Die vorliegende Arbeit trägt diesen Erkenntnissen Rechnung, da sie bei der Kriechantwort auf eine Spannungsstufe zwischen einem "jungfräulichen" und vorbelasteten Beton unterscheidet. Das Kriechpotential ist im wesentlichen durch den Zeitpunkt des Belastungsbeginns und den dann vorliegenden Hydrationszustand des Zementes bestimmt. Dadurch wird die zeitveränderliche Natur des Betons (Alterung) berücksichtigt.

Die Irreversibilität eines wesentlichen Teiles der Kriechverformung wird durch den Fließanteil und in weitaus geringerem Maße durch die Alterung der verzögert-elastischen Formänderungskomponente erzeugt. Dadurch, daß der Fließanteil aus dem Verhalten eines Fluids (Maxwell-Dämpfer) erklärt wird, wird der Tatsache Rechnung getragen, daß die eigentliche Quelle des Kriechens im Zementstein zu suchen ist. Die Zuschläge haben nur modifizierenden Charakter. Dies erklärt auch, daß Kriechen beobachtet wurde, gleichgültig, wie klein die (Deviator-) Spannung sein mag.

Im irreversiblen, nichtlinearen Fließansatz wird berücksichtigt, daß bei einer Wiederbelastung das Fließen, und damit das Kriechen, umso mehr reduziert wird, je "strenger" die Spannungsvorgeschichte war (s. auch Mullick [107]). Damit wird im theoretischen Ansatz der phänomenologischen Erkenntnis Rechnung

getragen, daß die Mikrostrukturänderungen im Beton vor allem bei variabler Spannungsgeschichte als Kriechmechanismus nicht vernachlässigt werden dürfen. Sie spielen vielmehr eine wesentliche Rolle im Zusammenwirken mit den seit langem bekannten Kriechmechanismen des viskosen Zementleimfließens (viscous flow) und der Diffusionstheorie (seepage theory) (Mullick [107]). Solche Mikrostrukturveränderungen sind zu klein für direkte Beobachtungen. Sie wurden daher entsprechend dem makroskopischen Meßergebnis berücksichtigt, das für konstante kriecherzeugende Spannung vorlag. Die Mikrostrukturänderungen können auf mannigfaltige Ursachen zurückzuführen sein, z. B. Grenzflächenverbundrisse zwischen Zuschlag und Zementstein, Verdichten von Hohlräumen, Mikrorisse bei hohem Belastungsgrad, Auflösung und Rekristallisation von Zementsteinkristallen, Verringerung der Dicke in der geschichteten Hydratstruktur durch externe Belastung etc. Der Beitrag dieser Prozesse zum Kriechen während einer Wiederbelastung wird mit zunehmender Dauer der Belastungsgeschichte immer geringer, da die Mikrostruktur eine neue Orientierung von größerer Stabilität erreicht. Daher wird der Zuwachs an Fließdehnung umso geringer, je länger die Belastungsgeschichte dauert.

Wegen der Interaktion von Mikrostrukturänderungen infolge des Kriechprozesses und dem Anwachsen der Hydratation nach Belastung ist die verzögerte Elastizität an jedem Zeitpunkt der Belastungsgeschichte abhängig vom Betonalter und wird daher als alternd angesetzt.

Die Erfassung der Mikrostrukturänderungen erfolgt im rheologischen Modell (siehe Bild 5-1) durch den nichtlinearen Maxwell-Dämpfer. Prinzipiell kann dieser Dämpfer auch durch eine n-fache Reihenschaltung von Bingham-Körpern erfolgen (s. Bild 2-10), dies wäre jedoch insofern falsch, da es sich beim Fließen des Betons (wie in Abschnitt 5.1.1. dargelegt) um ein viskoses und nicht plastisches Fließen handelt. Außerdem kann Beton als ein Mehrphasensystem nur bedingt als ein Festkörper angesehen werden. Dies schließt die Darstellung des Fließanteiles für kontinuierliche Spannungsgeschichten in der Form von Kelvin-Einheiten mit Rückstauklappen im rheologischen Modell aus, da dies z. B. im Fall der Relaxation unsinnige Ergebnisse (negative Restspannungen) liefern kann.

6. BESCHREIBUNG DES SCHWINGKRIECHENS DURCH NICHTLINEAREN ANSATZ UND VERGLEICH MIT DEN SPANNBETONRICHTLINIEN

6.1. Allgemeines

Die für die nachfolgenden Berechnungen und Vergleiche erstellten Programme wurden mit einer Prime 400-Rechenanlage ausgewertet. Für den Vergleich mit den Spannbetonrichtlinien [47] wurde für konstante Spannung entsprechend Glg. (3-14) die Kriechfunktion angesetzt:

$$\varphi(t, \tau_0) = \varphi_{f_0} \cdot [k_f(t) - k_f(\tau_0) + 0,4 \cdot k_v(t - \tau_0)] \quad (6-1)$$

Die zeitlichen Verläufe k_f und k_v , die aus [47] bzw. [48] entnommen werden können, wurden analog Glg. (2-18) mit $n = 4$ bzw. $n = 5$ angenähert.

Für den in Abschnitt 5 entwickelten neuen Ansatz sei der Vollständigkeit halber nochmals die Kriechfunktion für konstante Spannung angegeben:

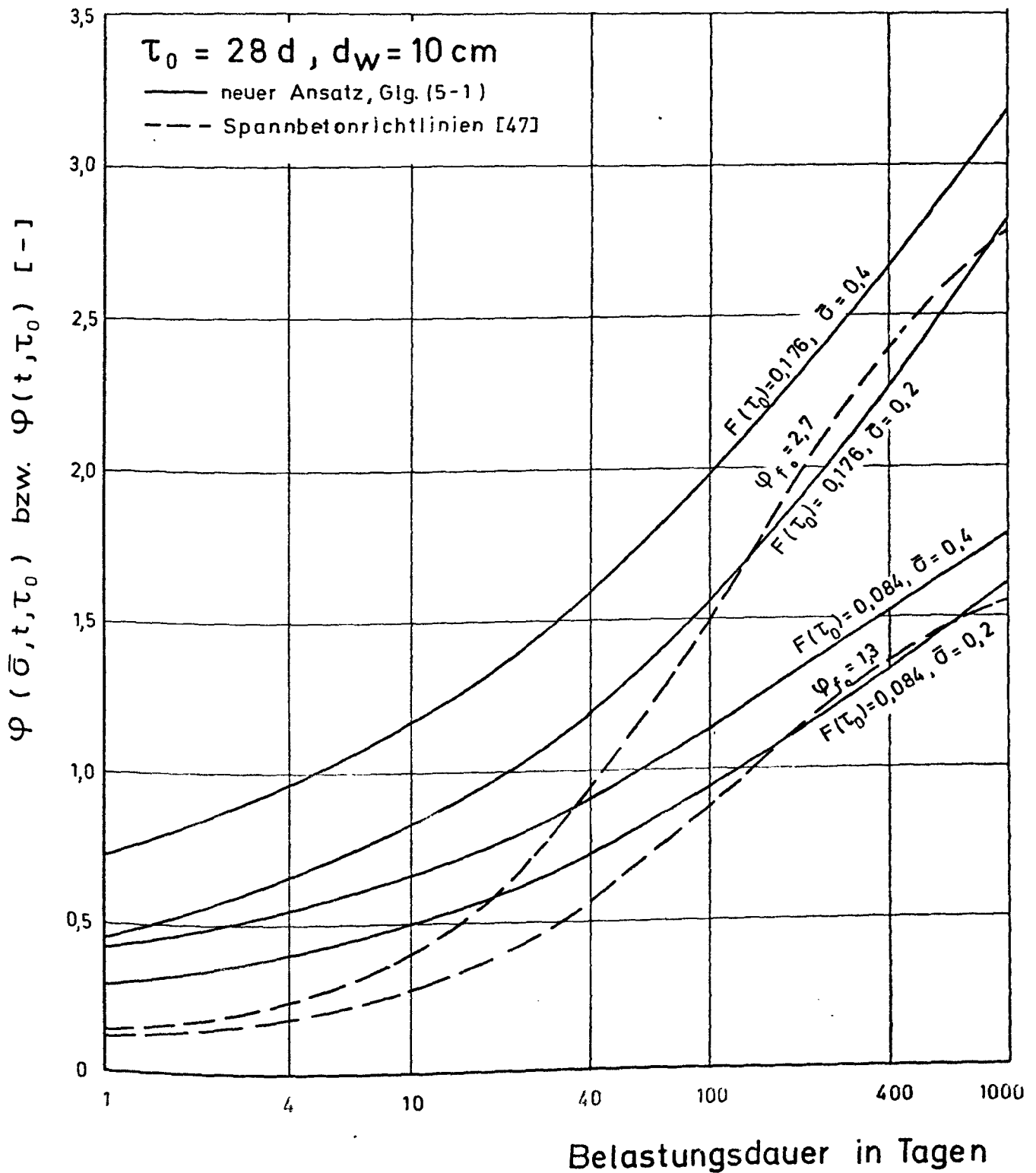
$$\varphi(\bar{\sigma}, t, \tau_0) = F(\tau_0) \cdot e^{b \cdot \bar{\sigma}} \cdot (t - \tau_0)^{c - \frac{b}{nT} \cdot \bar{\sigma}} + \varphi_{v\omega}(\tau_0) \cdot k_v(t - \tau_0) \quad (6-2)$$

Die Zeitfunktion $k_v(t - \tau_0)$ der verzögerten Elastizität ist identisch mit der von Glg. (6-1). Hinsichtlich $F(\tau_0)$, b , c und T wird auf Abschnitt 5 verwiesen. Für variable Spannung $\sigma(t)$ (auch für Relaxation) gelten die Integralgleichungen (3-8) in Verbindung mit (3-7) für die Spannbetonrichtlinien bzw. Glg. (5-1) für den neuen Ansatz.

Die Einschränkungen für Glg. (5-1) und (6-2) sind die folgenden:

1. Der Beton wird frühestens im Alter von 28 Tagen belastet.
2. Die Spannungszeitfunktionen sind periodisch.
3. Die untersuchten Frequenzen sind kleiner als 10^{-1} Hz ($\hat{=}$ Periodendauer $T_p = 10$ Sekunden).
4. Die Maximalspannung ist begrenzt durch den Belastungsgrad $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_c} \leq 0,6$.
5. Die klimatischen Verhältnisse bleiben während der Belastung unverändert.

Aus Gründen der Anschaulichkeit sei noch einmal der fundamentale Unterschied der beiden Ansätze am Beispiel der Kriechfunktionen für konstante Spannung dargelegt (siehe Bild 6-1 und 6-2). Für $\tau_0 = 28$ Tage ergeben sich gemäß



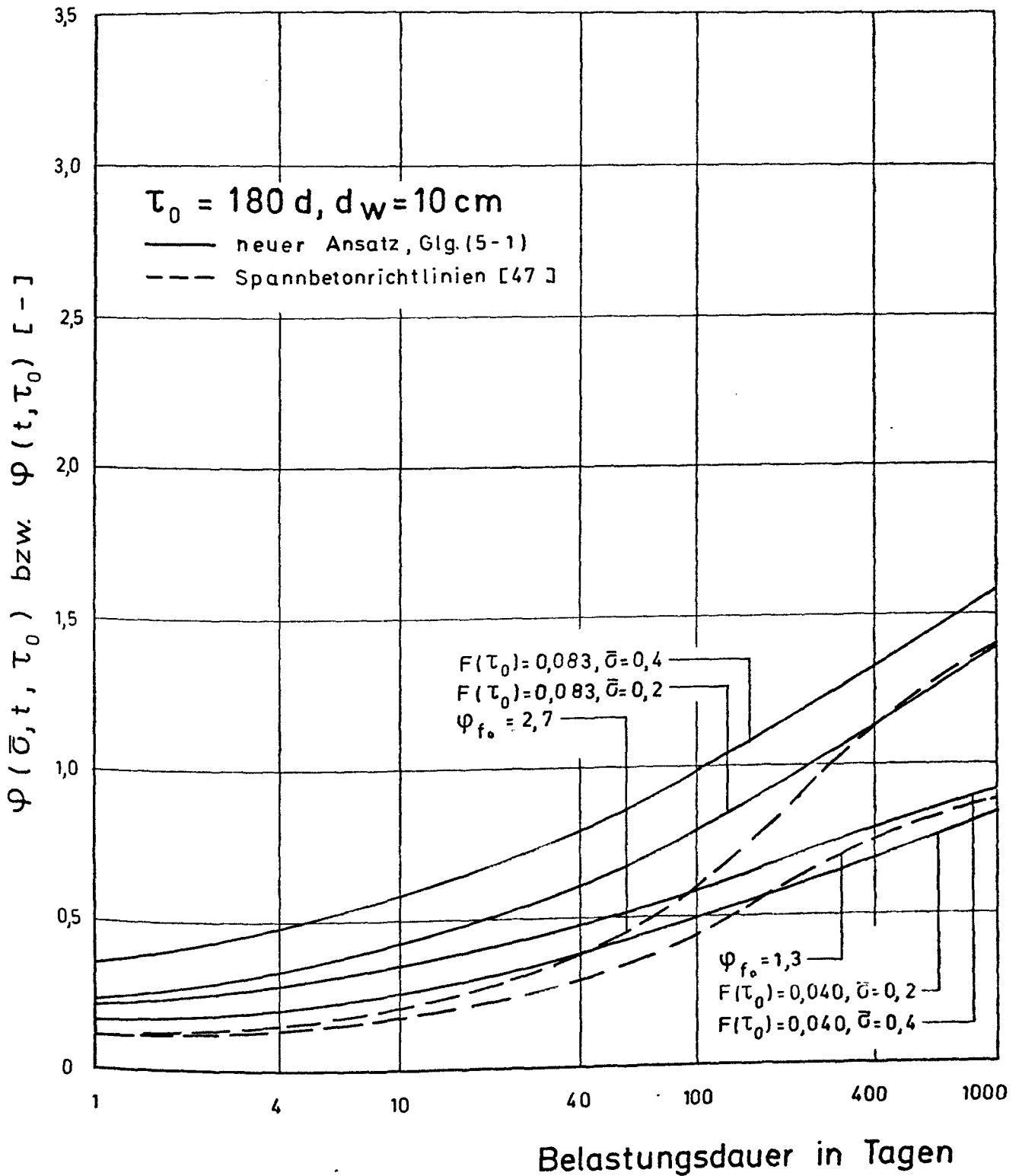


Bild 6-2 Kriechfunktion für konstante Spannung. Vergleich von neuem Ansatz und Spannbetonrichtlinien. Belastungsbeginn $\tau_0 = 180$ Tage.

Bild 6-1 die größten Unterschiede für eine Belastungsdauer < 100 Tage. Wie in den Abschnitten 3 und 5 dargelegt, ist dies darauf zurückzuführen, daß die Spannbetonrichtlinien den irreversiblen (Fließ-) Dehnungsanteil zu Beginn der Belastung unterschätzen. Bedingt durch den Ansatz der Linearität von Spannung und Dehnung, insbesondere der Kriechdehnung, unterschätzen die Spannbetonrichtlinien das Kriechen im gesamten Zeitbereich für höhere Spannungen. Diese Aussage gilt auch bereits im Gebrauchsspannungsbereich, denn ein Belastungsgrad von $\bar{\sigma} = 0,4$ wird von den zulässigen Spannungen im Spannbetonbau durchaus überschritten. Die Unterschiede werden umso ausgeprägter, je größer der Fließanteil am gesamten Kriechen ist. Ähnliche Aussagen ergeben sich, wenn ein höheres Erstbelastungsalter τ_0 gewählt wird, wie z. B. $\tau_0 = 180$ Tage in Bild 6-2.

Für die Berechnung der Kriechdehnungen infolge variabler Spannung ist eine geschlossene Lösung der Integralgleichung (5-1) nicht mehr möglich. Dies wäre schon mit den gewählten Funktionen für $\varphi_{v\infty}(\tau)$ und $k_v(t - \tau)$ für den verzögert-elastischen Anteil allein - der in dieser Form dem Produktansatz der DIN 1045 [33] für das Gesamtkriechen entspricht - nicht möglich, wie in Abschnitt 3 dargelegt wurde. Es wurden daher Rekursionsformeln für die numerische Auswertung in den Programmen entwickelt, die an dieser Stelle nicht mehr aufgeführt werden sollen, da sie äußerst umfangreich sind. Die Integration wurde nach der "3/8-Regel" durchgeführt. Der Bereich geringer Belastungsdauer wurde beim Fließansatz gesondert behandelt, da die Ableitung von $k_f(\bar{\sigma}, t - \tau_0)$ für $t - \tau_0 \rightarrow 0$ gegen Unendlich geht.

6.2. Kriechdehnung unter Schwingbeanspruchung und Vergleich mit stationärem (statischem) Kriechen unter besonderer Berücksichtigung der Frequenz

6.2.1. Einfluß der Spannungszeitfunktion

Prinzipiell werden nur periodische, ungedämpfte Spannungszeitfunktionen untersucht, die den Dirichletschen Bedingungen genügen und bezüglich der σ_m -Achse eine Symmetrie vierter Art (s. Bronstein [61]) aufweisen, untersucht; es gilt also z. B. $\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$. Von den dann noch immer zahlreichen möglichen Funktionen wurden die in Bild 6-3 dargestellten Funktionsarten ausgewählt, die als repräsentativ für in der Praxis vorkommende Belastungsfälle (mit Ausnahme des periodischen Stoßes von kurzer Einwirkungsdauer) angesehen werden können. Hier-

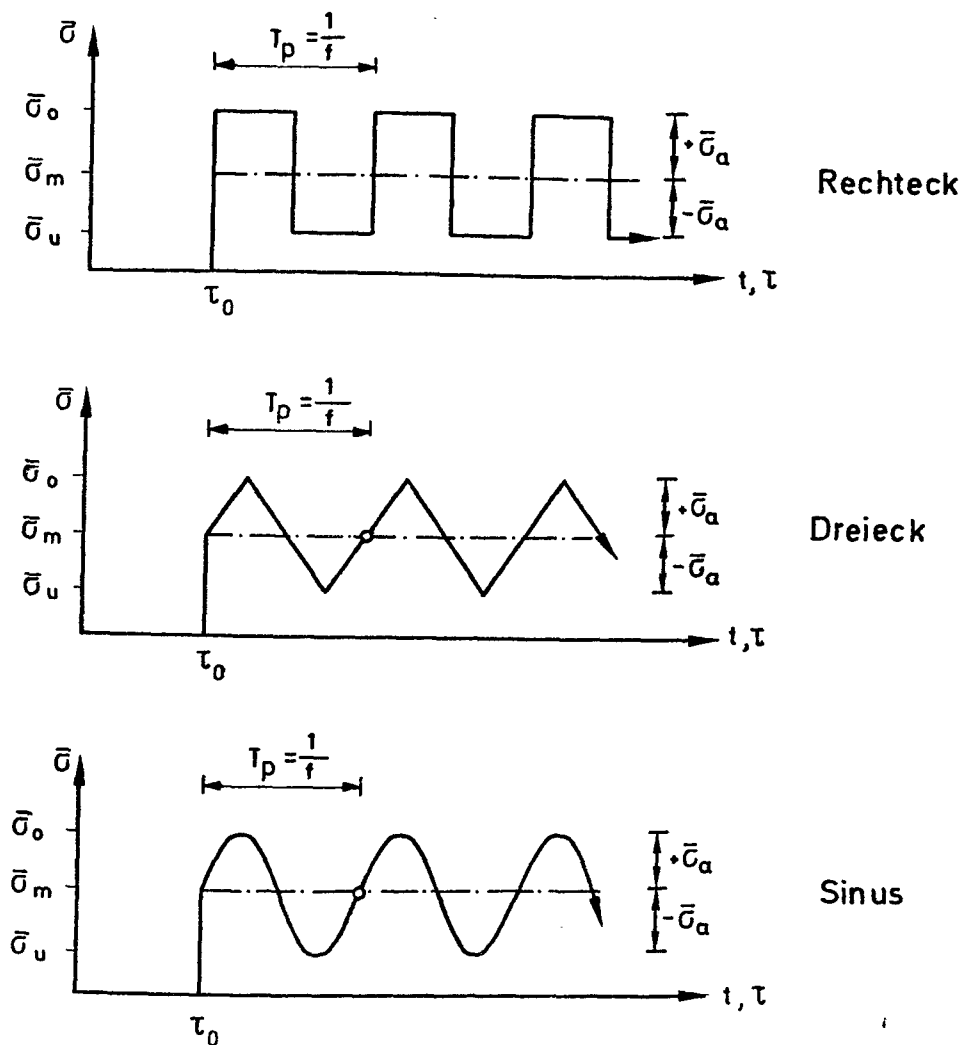


Bild 6-3 Gewählte Spannungszeitfunktionen

bei steht die Rechteckfunktion stellvertretend für eine große Völligkeit im Spannungs-Zeit-Diagramm während der ersten Halbperiode. Die Dreieck- bzw. Sinusfunktion hingegen ist als Beispiel für eine geringe Völligkeit anzusehen. Wie sich im folgenden zeigen wird, kommt der Art des Beginns der Spannungsgeschichte erhebliche Bedeutung zu. Eine Phasenverschiebung der Spannungszeitfunktionen wird daher gesondert in Abschnitt 6.2.5. untersucht.

Die Bilder 6-4 bis 6-6 zeigen den Unterschied zwischen den drei gewählten Funktionsarten. Dargestellt ist der Verhältnisswert η in Abhängigkeit von der Belastungsdauer. η ergibt sich als Quotient der Schwingkriechdehnung und der Kriechdehnung infolge stationären Kriechens mit $\sigma_m = \text{konst.}$ Die Schwingkriechdehnung kann somit unter Berücksichtigung des "Schwingkriechfaktors" η aus der stationären Kriechdehnung berechnet werden:

$$\epsilon_k(t, \bar{\sigma}(t)) = \eta(t, \bar{\sigma}(t)) \cdot \epsilon_k(t, \bar{\sigma}_m) \quad (6-3)$$

In den Bildern 6-4 bis 6-6 wurde von einem Betonalter bei Belastungsbeginn $\tau_0 = 28$ Tage, $d_w = 10$ cm sowie einem geringen Fließen gemäß den Spannbetonrichtlinien, Tabelle 5, Zeile 2 (φ_{f0}) bzw. gemäß neuem Ansatz, Tabelle 5-6 ($F(\tau_0)$) ausgegangen. Als Oberspannung wurde die größtmögliche ($\bar{\sigma}_0 = 0,6$) und als Unterspannung $\bar{\sigma}_u = 0$ gewählt; daraus ergibt sich eine bezogene Mittelspannung von $\bar{\sigma}_m = 0,3$. Neben der Art der Spannungsfunktion wurde die Periodendauer $T_p = \frac{1}{f}$ variiert.

Wie bereits in Abschnitt 3 dargelegt wurde, ist der Schwingkriechfaktor gemäß Spannbetonrichtlinien für kleine Belastungsdauer kleiner als eins und geht für $T_p \rightarrow 0$ gegen $\eta = 1$. Für größere Belastungsdauer ist $\eta > 1$ und nähert sich ebenfalls $\eta = 1$ für $T_p \rightarrow \infty$. Dieses Verhalten ergibt sich bei dem neuen Ansatz gemäß Glg. (5-1) nicht. Der η -Wert ist stets größer als 1. Er nähert sich für $T_p \rightarrow \infty$ ebenfalls dem Wert $\eta = 1$, wie sich durch eine Grenzbetrachtung unschwer feststellen läßt. Die Bedeutung der Art des Beginns der Spannungsgeschichte erkennt man sehr deutlich am Beispiel der Rechteckfunktion. Hier ist der Einfluß der Spannungsanteile, die über σ_m hinausgehen, besonders deutlich zu sehen. Ist die Periodendauer sehr groß ($n = 1$), so ist der η -Wert ebenfalls groß (siehe auch Abschnitt 6.2.5).

Bei Auswertung aller drei Spannungszeitfunktionen nach dem neuen Ansatz ergibt sich eine eindeutige Aussage hinsichtlich des Schwingkriechfaktors η in Abhängigkeit von der Frequenz bzw. Periodendauer:

Bei einer fest vorgegebenen Belastungsdauer fällt das Schwingkriechen gegenüber dem Kriechen infolge σ_m umso größer aus, je kleiner die Frequenz bzw. je länger die Periodendauer ist. Die Abweichung des η -Wertes von $\eta = 1$ ist bei der Rechteckfunktion am größten, bei der Dreiecksfunktion am kleinsten. Die Sinusfunktion liegt zwischen diesen Extremen mit Orientierung zur Dreieckfunktion.

Im weiteren wird daher, bis auf wenige Ausnahmen, aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine Auswertung der sinusförmigen Spannungszeitfunktion verzichtet.

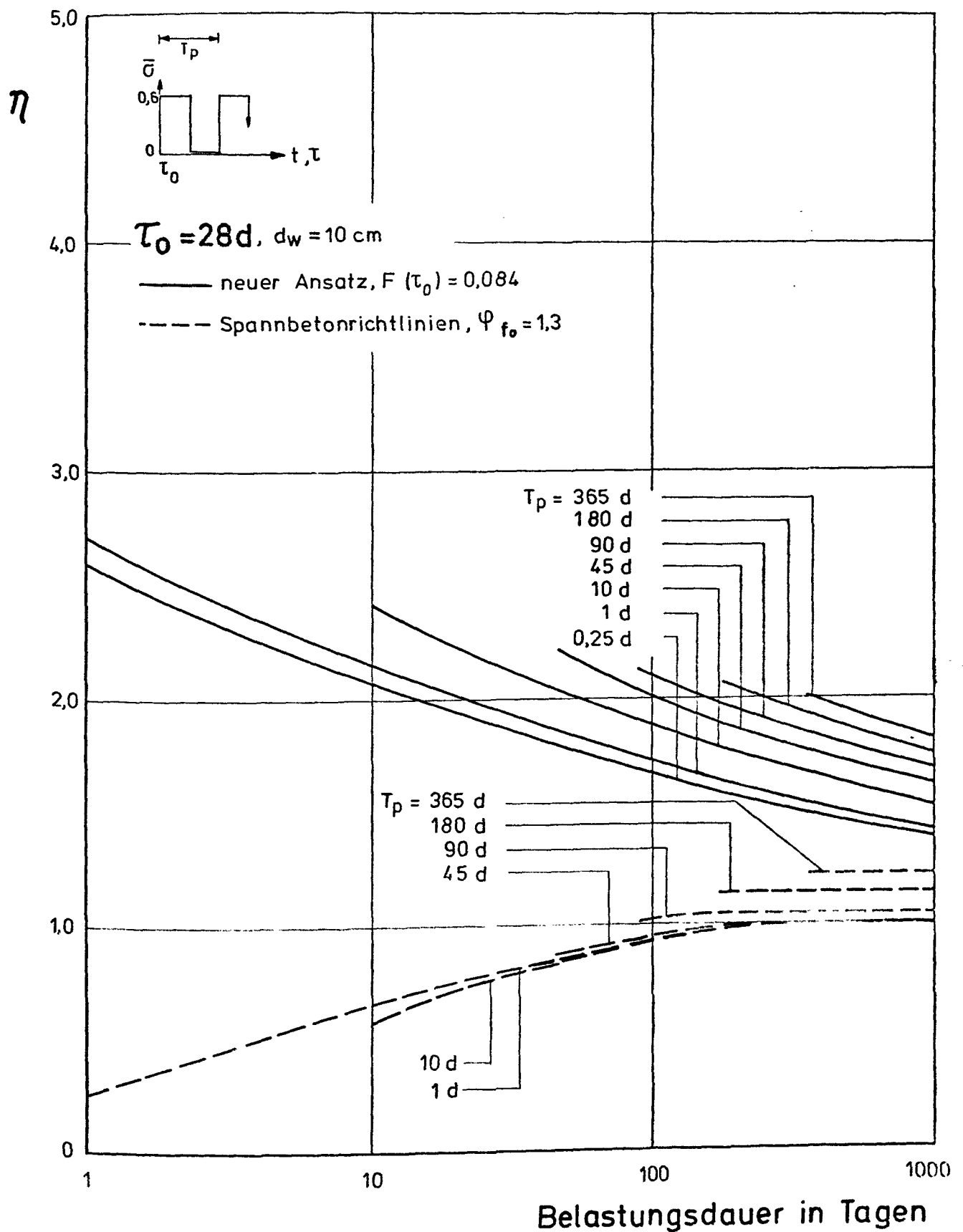


Bild 6-4 Schwingkriechfaktor η in Abhängigkeit von der Belastungsdauer für verschiedene Periodendauern (Frequenzen). Rechteckfunktion.

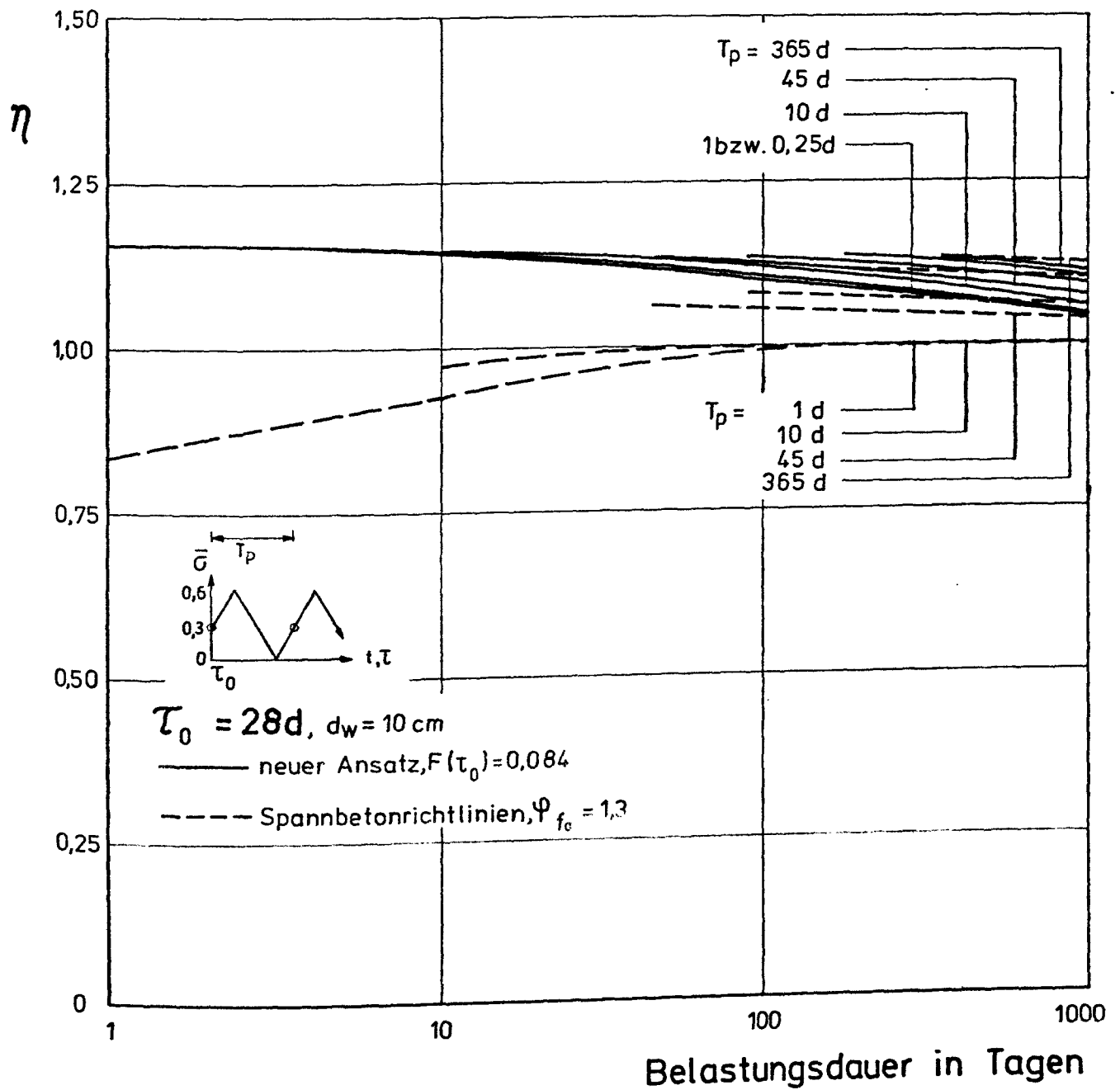


Bild 6-5 Schwingkriechfaktor η in Abhängigkeit von der Belastungsdauer für verschiedene Periodendauern (Frequenzen). Dreieckfunktion.

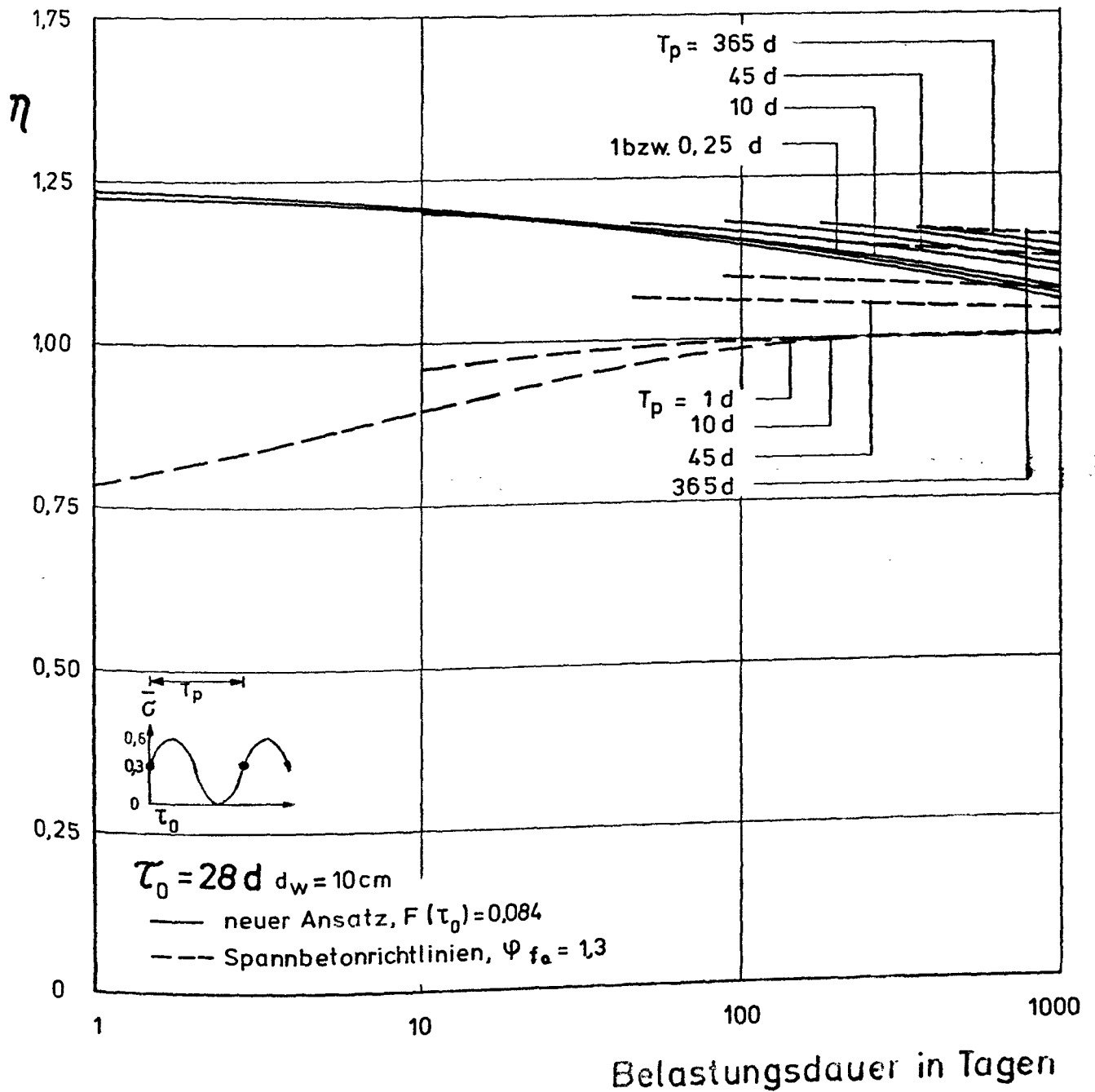


Bild 6-6 Schwingkriechfaktor η in Abhängigkeit von der Belastungsdauer für verschiedene Periodendauern (Frequenzen). Sinusfunktion.

Daß die Tendenz eines abnehmenden η -Wertes mit kleiner werdender Periodendauer auch für sehr geringe Periodendauern gilt, zeigt Tabelle 6-1. Bei der Berechnung der verzögert-elastischen Dehnungen wurde hier im übrigen von 6 Retardationszeiten ($n = 6$ in Glg. (2-18)) ausgegangen, um den k_v -Verlauf auch für sehr geringe Werte $t - \tau$ entsprechend den Meßergebnissen (z. B. [73]) annähern zu können. Wegen der anderenfalls enorm ansteigenden Rechenzeit

Tabelle 6-1 Schwingkriechfaktor η für 1 Tag Belastungsdauer ($\tau_0 = 28$ Tage, $F(\tau_0) = 0,176$, $\bar{\sigma}_m = 0,2$, $\bar{\sigma}_a = 0,2$) bei geringer Periodendauer. Neuer Ansatz, Glg. (5-1).

Perioden- dauer Tage	Frequenz Hz	$\eta(t - \tau_0 = 1 \text{ d})$ für Spannungszeitfunktionsart:		
		Rechteck	Dreieck	Sinus
1,000	$1,16 \cdot 10^{-5}$	2,21	1,18	1,26
0,100	$1,16 \cdot 10^{-4}$	1,98	1,19	1,28
0,010	$1,16 \cdot 10^{-3}$	1,79	1,16	1,23
0,001	$1,16 \cdot 10^{-2}$	1,78	1,18	1,27

wurde die Auswertung auf $t - \tau_0 = 1$ Tag beschränkt. Die uneinheitliche Tendenz bei Dreieck und Sinus ist auf unvermeidliche Ungenauigkeiten durch die Iteration und die Beschreibung des k_v -Verlaufes mit Glg. (2-18) und der damit verbundenen Empfindlichkeit bei der Wahl der α_{vi} zurückzuführen. Da für die Belange der Praxis der Bereich einer Belastungsdauer $t - \tau_0 < 1$ Tag relativ uninteressant ist, wird im folgenden nur der Bereich $t - \tau_0 > 1$ Tag untersucht. Da außerdem die Änderungen der η -Werte für Frequenzen zwischen 10^{-1} und 10^{-5} Hz (Periodendauer 10 Sekunden bis 1 Tag) auch für eine Rechteckfunktion vernachlässigbar klein sind, kann im weiteren die Auswertung für $T_p = 1$ Tag ($f \approx 10^{-5}$ Hz) als stellvertretend für den genannten Frequenzbereich angesehen werden. Bei noch langsameren Frequenzen hingegen nimmt bei einer Belastungsdauer von ca. 3 Jahren der η -Wert bei einer Rechteckfunktion immerhin noch von $\eta = 1,4$ bei $T_p = 1$ Tag auf $\eta = 1,8$ für $T_p = 1$ Jahr zu.

Beim Vergleich der η -Werte gemäß neuem Ansatz und dem Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien ist es jedoch sehr wichtig, festzuhalten, daß η eine bezogene Größe ist. Würde z. B. der η -Wert gemäß Spannbetonrichtlinien und neuem Ansatz in etwa gleich sein, z. B. in Bild 6-5 für $t - \tau_0 = 3$ Jahre und $T_p = 1$ Tag, so könnte man versucht sein, die Kriechdehnungen für periodische Spannung mit dem η -Wert und der Kriechdehnung infolge σ_m nach dem Ansatz der Spannbetonrichtlinien zu bestimmen. Welche Fehler man dabei begeht, zeigen die Bilder 6-7 und 6-8. Dargestellt ist hier die bezogene Kriechverformung $\frac{E}{\beta_c} \cdot \varepsilon_k$ in Abhängigkeit von der Belastungsdauer, und zwar jeweils zu Zeitpunkten eines ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer T_p . Um die Eingangsdaten praxisnah anzusetzen, wurde von $\tau_0 = 28$ d, $d_w = 10$ cm, $T_p = 1$ Tag und einem Belastungsgrad unter Mittelspannung $\bar{\sigma}_m = 0,15$ bei einer Spannungsamplitude von $\bar{\sigma}_a = 0,15$ ausgegangen.

Die so gewählten Daten besagen anschaulich, daß 20 % der Maximallast dauernd, 80 % hingegen nur periodisch einwirken. Die Bilder zeigen klar, daß das Kriechen von den Spannbetonrichtlinien für relativ geringe Belastungsdauer sehr stark unterschätzt wird. Für größere Belastungsdauer sind die Unterschiede beim Rechteck noch beträchtlich, beim Dreieck bereits relativ gering. Der Einfluß eines unterschiedlich hohen Fließanteiles ist ebenfalls aus den Bildern 6-7 und 6-8 ersichtlich. Für den Vergleich wurden $\varphi_{fo} = 1,3$ ($F(\tau_0) = 0,084$) und $\varphi_{fo} = 2,7$ ($F(\tau_0) = 0,176$) gemäß Tabelle 5 in [47, 128] bzw. Tabelle 5-6 gewählt. Während die relativen Abweichungen zwischen Spannbetonrichtlinien und neuem Ansatz bei hoher Belastungsdauer nahezu unbeeinflusst von der Größe des Fließens sind, gilt dies für geringe Belastungsdauer nicht. Hier wird die relative Abweichung zwischen den beiden Ansätzen umso größer, je höher das Fließen angesetzt wird. Die Ursache hierfür ist - einmal abgesehen von der Nichtlinearität des Fließens - vor allem darin zu sehen, daß das Fließen bei Belastungsbeginn von den Spannbetonrichtlinien - bekanntermaßen - viel zu gering angesetzt wird.

Die gleiche tendenzielle Aussage erhält man auch aus den Bildern 6-9 und 6-10, in denen als Ergänzung zu den bisherigen Darstellungen die Bandbreite der Kriechdehnungen bei Schwingbeanspruchung zu ersehen ist. Unter Bandbreite ist hierbei der Bereich zu verstehen, der durch die Umhüllenden für die Kriechdehnungen infolge zyklischer Spannung gebildet wird. Zur Verdeutlichung des Einflusses der Nichtlinearität wurde bei sonst gleichen Eingangsdaten $\bar{\sigma}_m = \pm \bar{\sigma}_a = 0,3$ gewählt. Die Unterschiede bei einer Rechteckfunktion zwischen Spannbetonrichtlinien und neuem Ansatz sind beträchtlich.

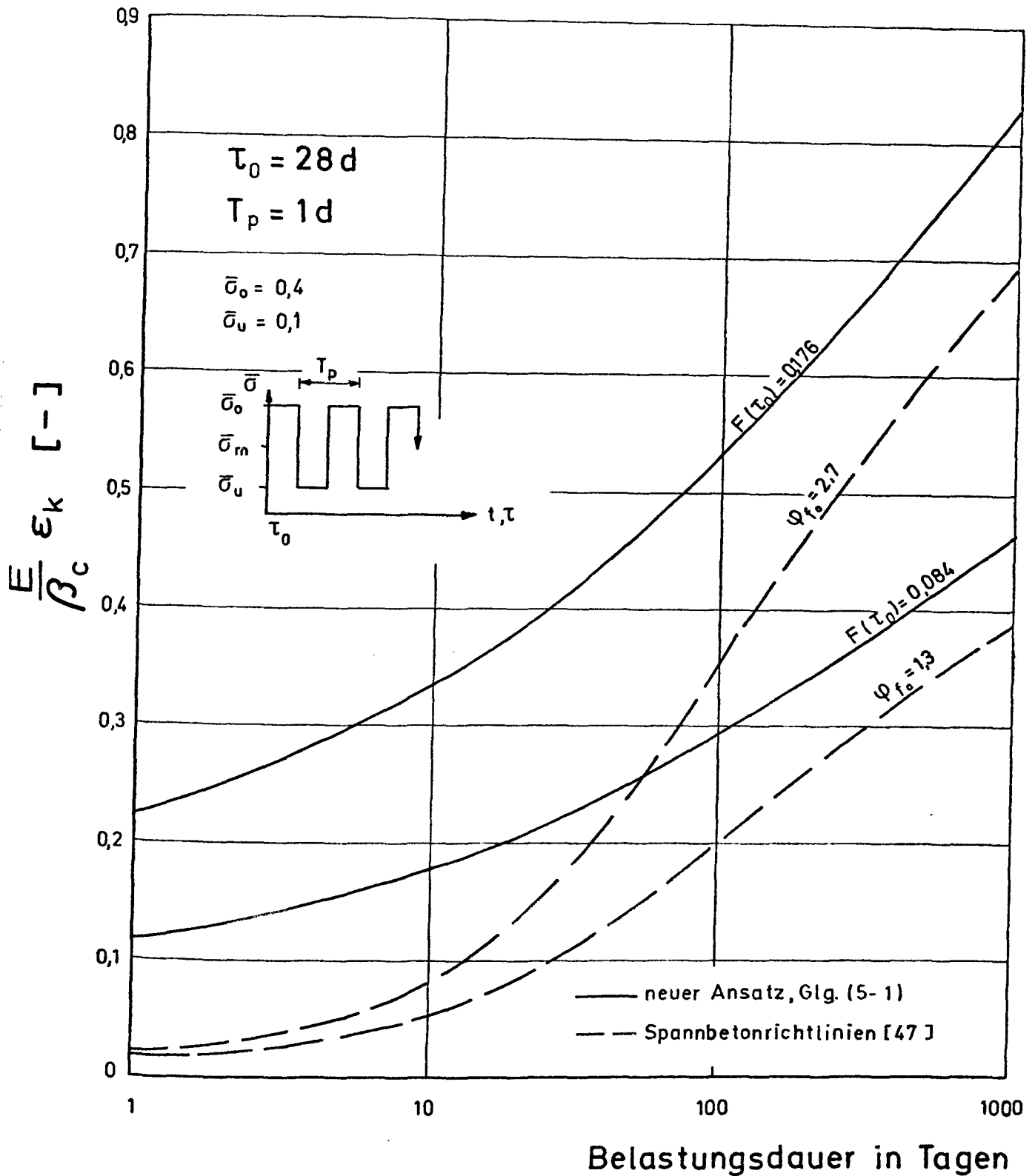


Bild 6-7 Beispiel für bezogene Kriechverformung infolge Schwingbeanspruchung an Zeitpunkten eines ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer T_p . Belastungsbeginn nach 28 Tagen. Rechteckfunktion.

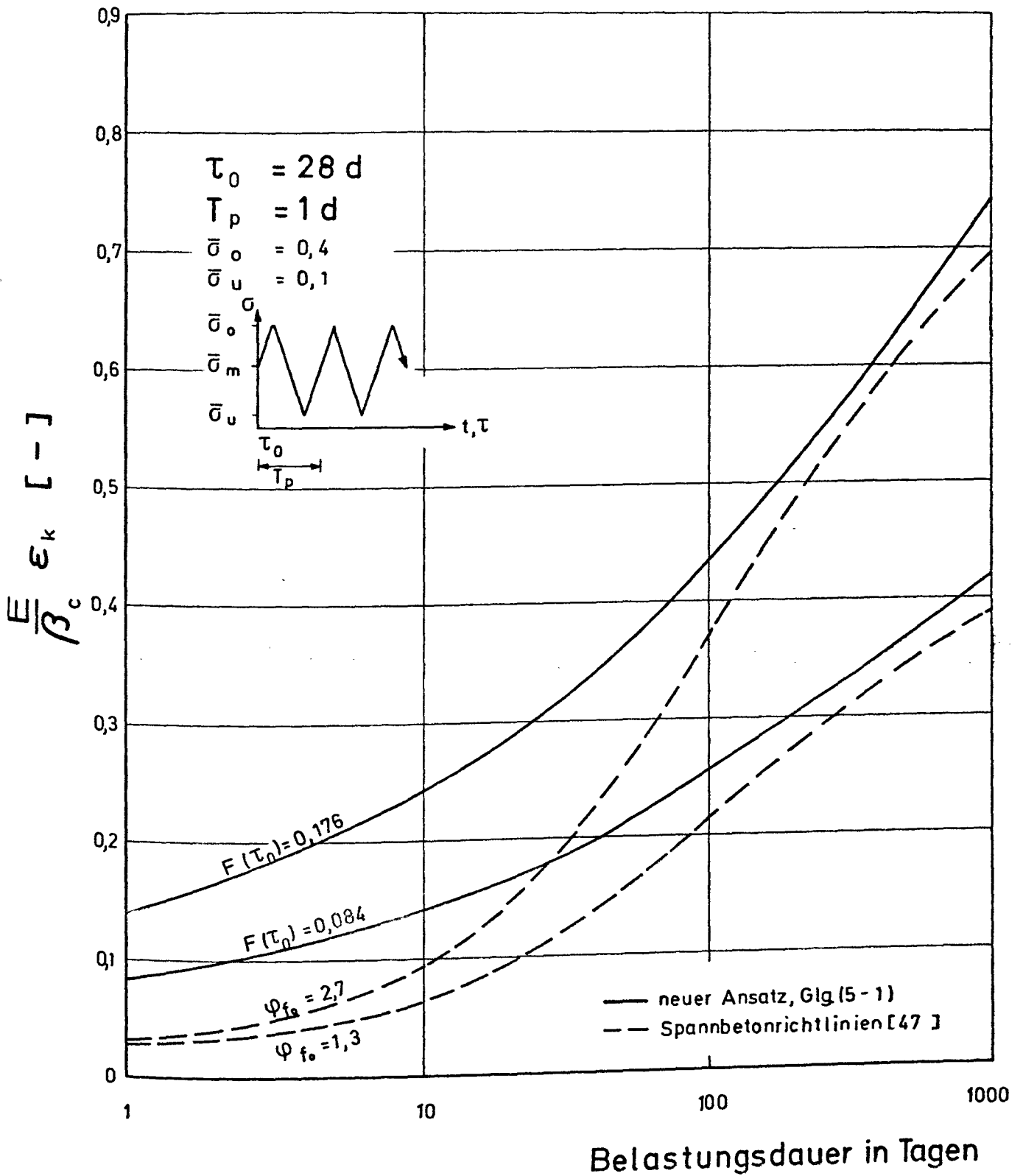


Bild 6-8 Beispiel für bezogene Kriechverformung infolge Schwingbeanspruchung an Zeitpunkten eines ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer T_p . Belastungsbeginn nach 28 Tagen. Dreieckfunktion.

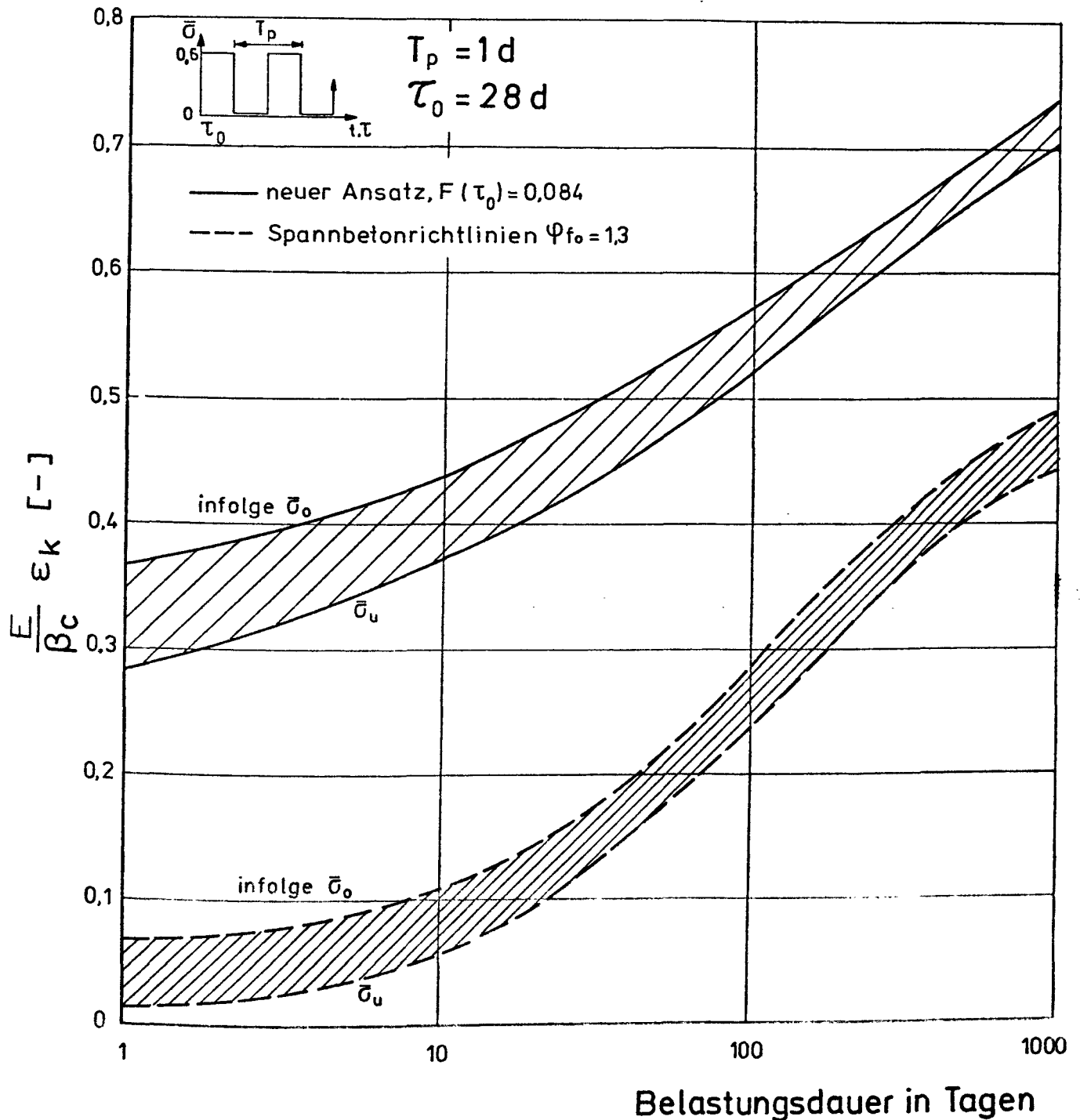


Bild 6-9 Vergleich des Kriechens unter Schwingbeanspruchung gemäß
 neuem Ansatz, Glg. (5-1) und Spannbetonrichtlinien [47].
 Rechteckfunktion.

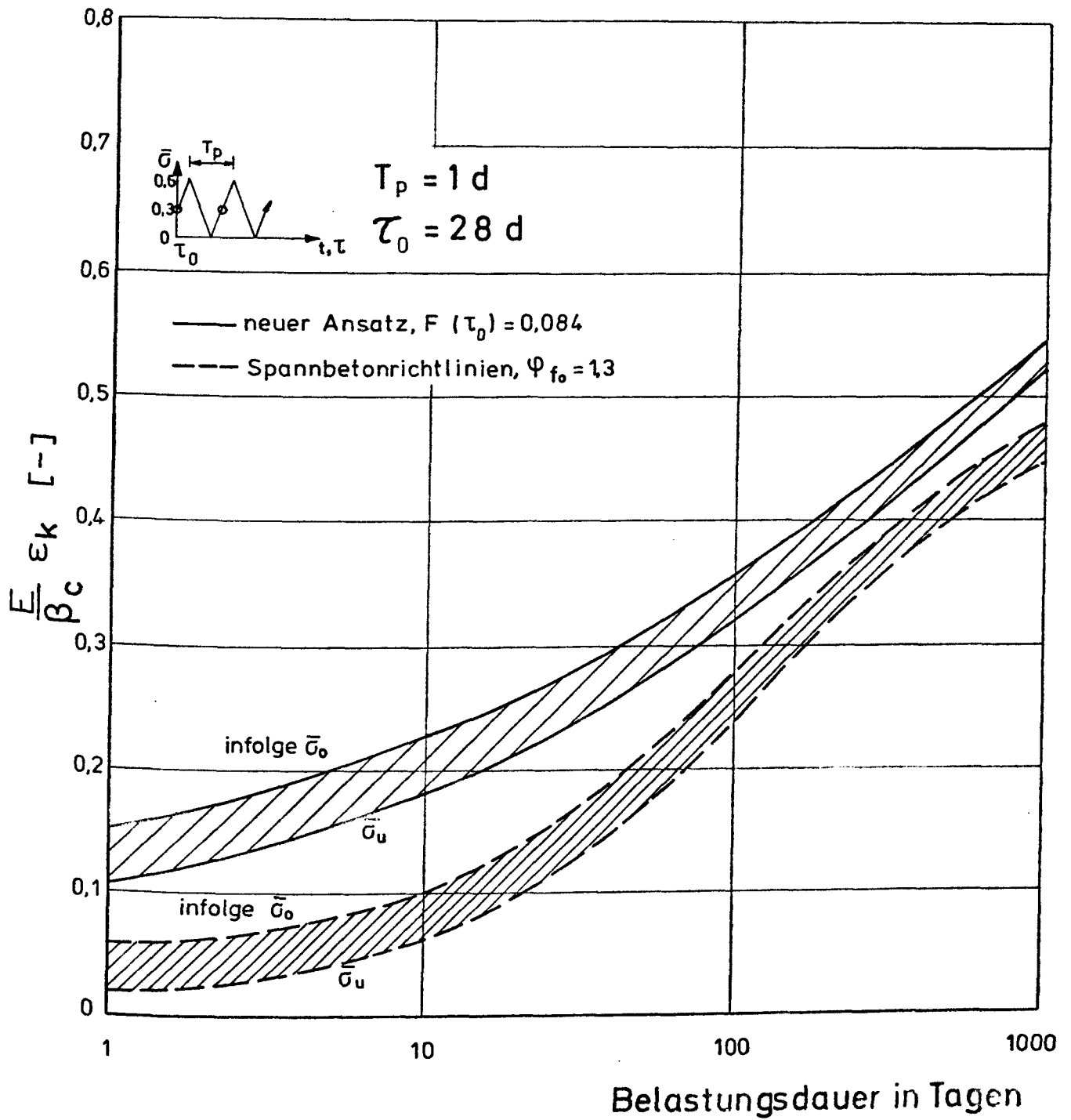


Bild 6-10 Vergleich des Kriechens unter Schwingbeanspruchung gemäß
 neuem Ansatz, Glg. (5-1) und Spannbetonrichtlinien [47].
 Dreiecksfunktion

Bei der Dreieckfunktion sind sie - wie bereits gezeigt - für große Belastungsdauer weniger ausgeprägt. Die Bandbreite wird natürlich bei Zunahme der Periodendauer wesentlich größer. Wichtig ist auch, daß sich die Bandbreite mit zunehmender Belastungsdauer beim neuen Ansatz deutlich verringert, was nicht zuletzt auf die Alterung der verzögerten Elastizität zurückzuführen ist. Nebenbei sei bemerkt, daß der Produktansatz hier bei gleicher Frequenz eine wesentlich größere Bandbreite liefern würde, die sich in den Versuchsergebnissen (z.B. [88, 89, 90]) nicht feststellen läßt.

6.2.2. Einfluß der Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a$

In den Bildern 6-4 bis 6-6 hatte es sich gezeigt, daß der Schwingkriechfaktor η bei gleicher Belastungsdauer abhängig von der Periodendauer T_p ist, d. h. von der Zahl der Lastwechsel n , die während dieser Belastungsdauer durchlaufen wurde. Dabei zeigte sich klar, daß die η -Werte mit abnehmender Periodendauer ebenfalls abnehmen. Die Bilder 6-7 und 6-8 haben dann gezeigt, daß die Unterschiede zwischen Spannbetonrichtlinien und neuem Ansatz hinsichtlich des η -Wertes dann am größten sind, wenn der Fließanteil am Gesamtkriechen besonders groß ist.

Unter diesen Aspekten wurde nun der Einfluß der Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a$ untersucht. Hierbei wurde von $\tau_0 = 28$ Tagen, $\bar{\sigma}_m = 0,2$ und $\varphi_{fo} = 2,7$ bzw. $F(\tau_0) = 0,176$, $d_w = 10$ cm sowie einer Belastungsdauer $t - \tau_0 = 1$ Jahr ausgegangen. Die Bilder 6-11 und 6-12 zeigen die Abhängigkeit des η -Wertes von der Periodenanzahl (Periodendauer) mit $\bar{\sigma}_a$ als Parameter. Während die η -Werte nach den Spannbetonrichtlinien für Rechteckfunktion im Bereich einer Periodenanzahl $n > 10$ (d. h. Periodendauer < 1 Monat) praktisch unabhängig von $\bar{\sigma}_a$ sind, ergibt sich die Abhängigkeit des η -Wertes von $\bar{\sigma}_a$ für $n < 10$ dergestalt, daß die η -Werte für abnehmendes n umso mehr zunehmen, je größer die Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a$ angesetzt wird. Die gleiche Aussage, lediglich in abgeschwächter Form, läßt sich auch für die η -Werte machen, die nach den Spannbetonrichtlinien für die Dreieckfunktion bestimmt werden.

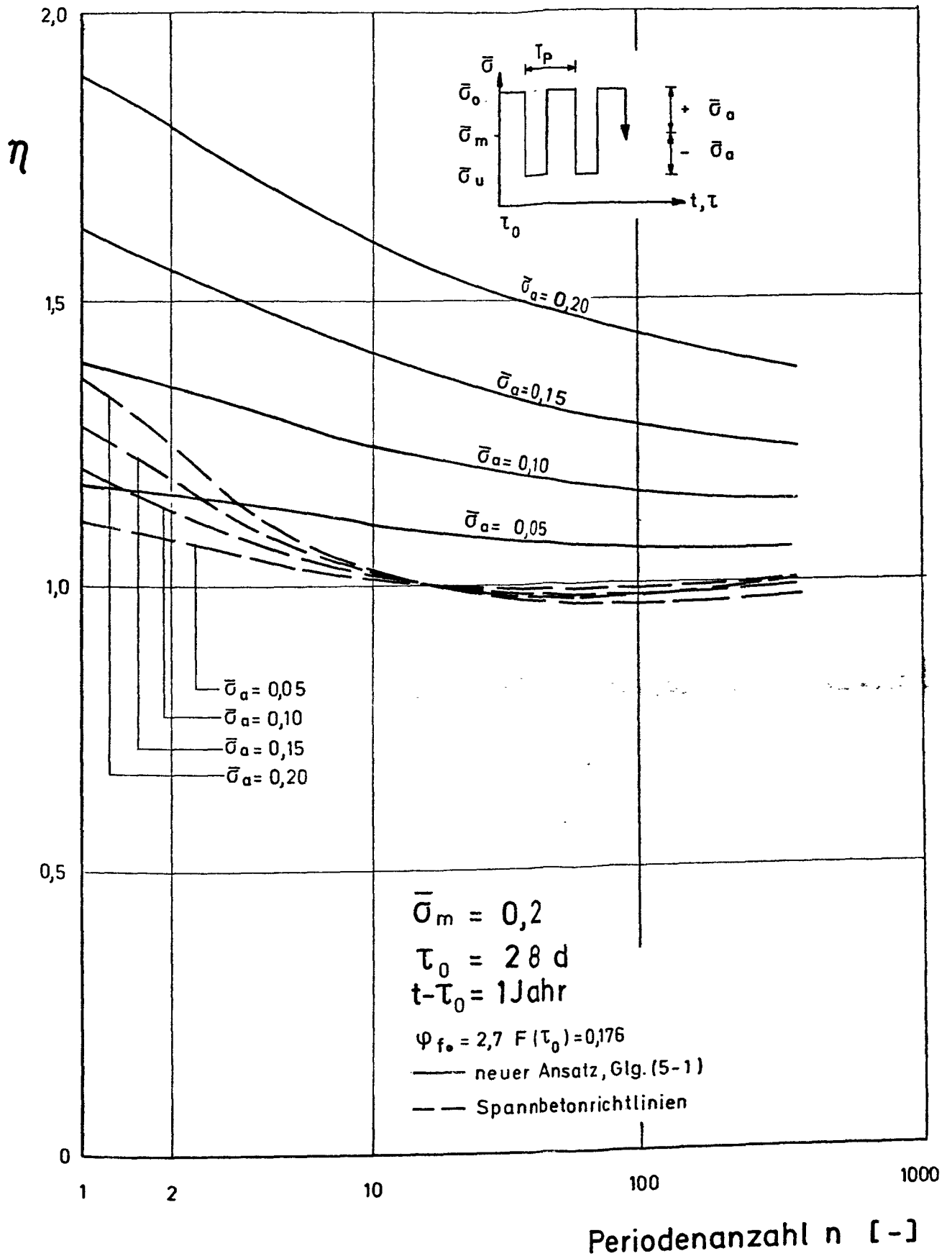


Bild 6-11 Abhängigkeit des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer in Abhängigkeit von der Periodenanzahl (Periodendauer) bei konstanter Mittelspannung und variabler Spannungsamplitude. Rechteckfunktion.

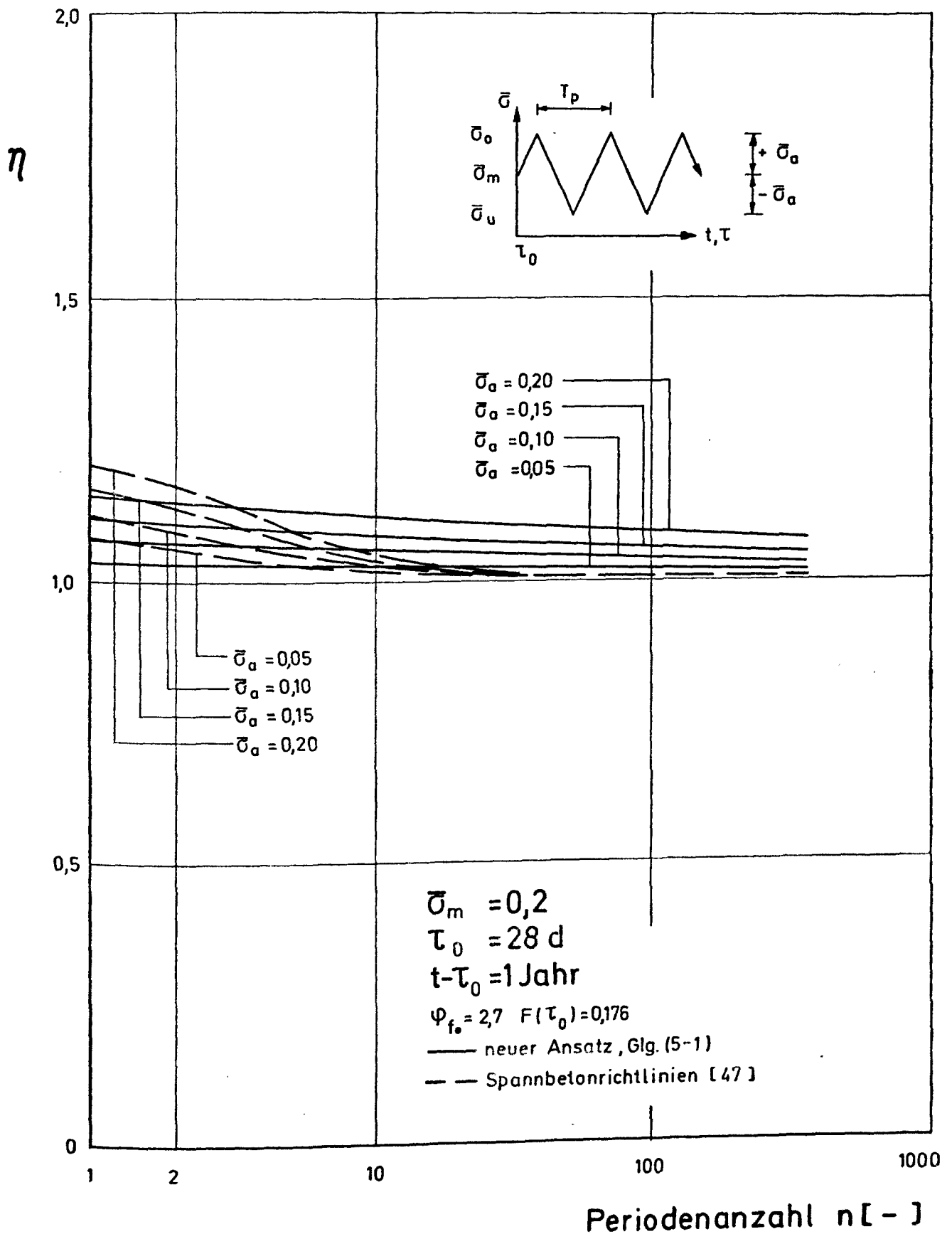


Bild 6-12 Abhängigkeit des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer in Abhängigkeit von der Periodenanzahl (Periodendauer) bei konstanter Mittelspannung und variabler Spannungsamplitude. Dreieckfunktion.

Nach dem neuen Ansatz hingegen ergibt sich ein deutlich differenziertes Bild. Für eine Rechteckfunktion nehmen die η -Werte zwar auch mit abnehmender Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a$ und abnehmender Periodendauer ab, die Unterschiede bei variiertem $\bar{\sigma}_a$ sind jedoch wesentlich größer als nach den Spannbetonrichtlinien. In Abhängigkeit von der Periodenanzahl nimmt der η -Wert für ein bestimmtes $\bar{\sigma}_a$ außerdem nicht so schnell ab wie bei den Spannbetonrichtlinien. Einen nicht unwesentlichen Einfluß hierauf hat sicherlich der Zeitpunkt T , also diejenige Belastungsdauer, ab der die Spannungs-Nichtlinearität der Fließdehnung verschwindet. Gleichwohl ist es möglich, durch Ansatz eines η -Wertes entsprechend einer relativ großen Periodendauer die Vergrößerung des Kriechens gegenüber dem stationären Kriechen infolge σ_m zu berücksichtigen. Für eine Dreieckfunktion ist die Beeinflussung des η -Wertes durch Periodendauer und Spannungsamplitude nur gering ausgeprägt, und zwar in der gleichen Tendenz wie bei der Rechteckfunktion.

Zusammenfassend kann man sagen, daß das Schwingkriechen für Dreieck- und Sinusspannungszeitfunktion unabhängig von Spannungsamplitude und Periodendauer genügend genau durch den Kriechansatz für $\sigma_m = \text{konst.}$ beschrieben werden kann. Dies gilt für eine Rechteckfunktion nicht. Hier ist unter bestimmten Umständen (großes $\bar{\sigma}_a$, großes T_p) ein deutlich größeres Schwingkriechen als das statische Kriechen mit $\sigma_m = \text{konst.}$ zu erwarten (Schwingkriechfaktor $\eta \gg 1$).

6.2.3. Einfluß der Mittelspannung $\bar{\sigma}_m$

In Ergänzung zu Abschnitt 6.2.2. soll nun bei konstanter Spannungsamplitude die Mittelspannung $\bar{\sigma}_m$ variiert werden. Die Ergebnisse sind in den Bildern 6-13 bis 6-16 dargestellt.

In den Bildern 6-13 und 6-14 sind die Schwingkriechfaktoren η für einen großen $\bar{\sigma}_a$ -Wert dargestellt. Es zeigt sich, daß die η -Werte umso größer sind, je geringer die Mittelspannung $\bar{\sigma}_m$ ist, und zwar sowohl für den Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien, als auch für den neuen Ansatz. Dies ist nicht überraschend, da im wesentlichen der erste Zyklus die Weichen für die Größe des

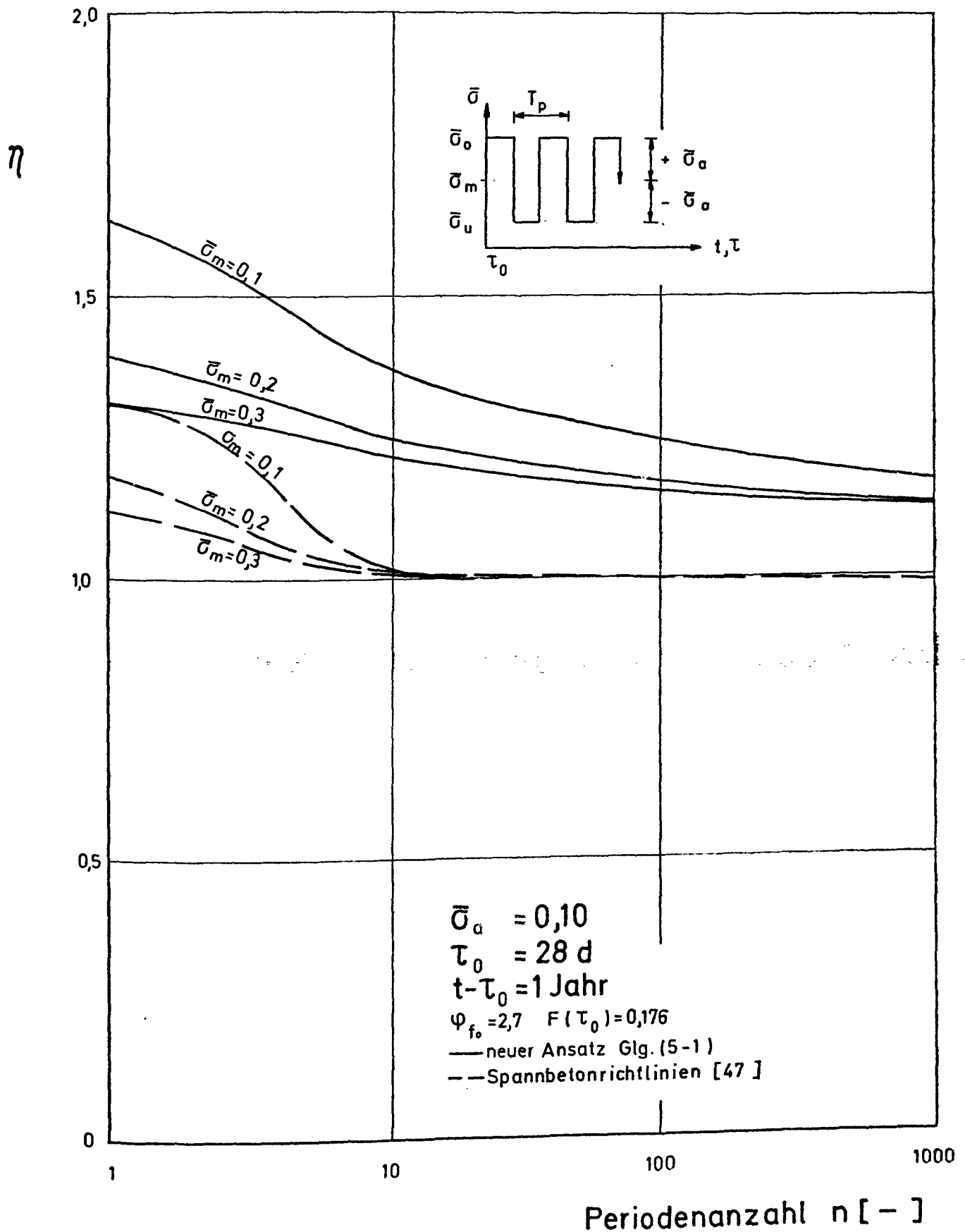


Bild 6-13 Abhängigkeit des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer in Abhängigkeit von der Periodenanzahl (Periodendauer) bei konstanter Spannungsamplitude und variabler Mittelspannung. Rechteckfunktion, großes σ_a .

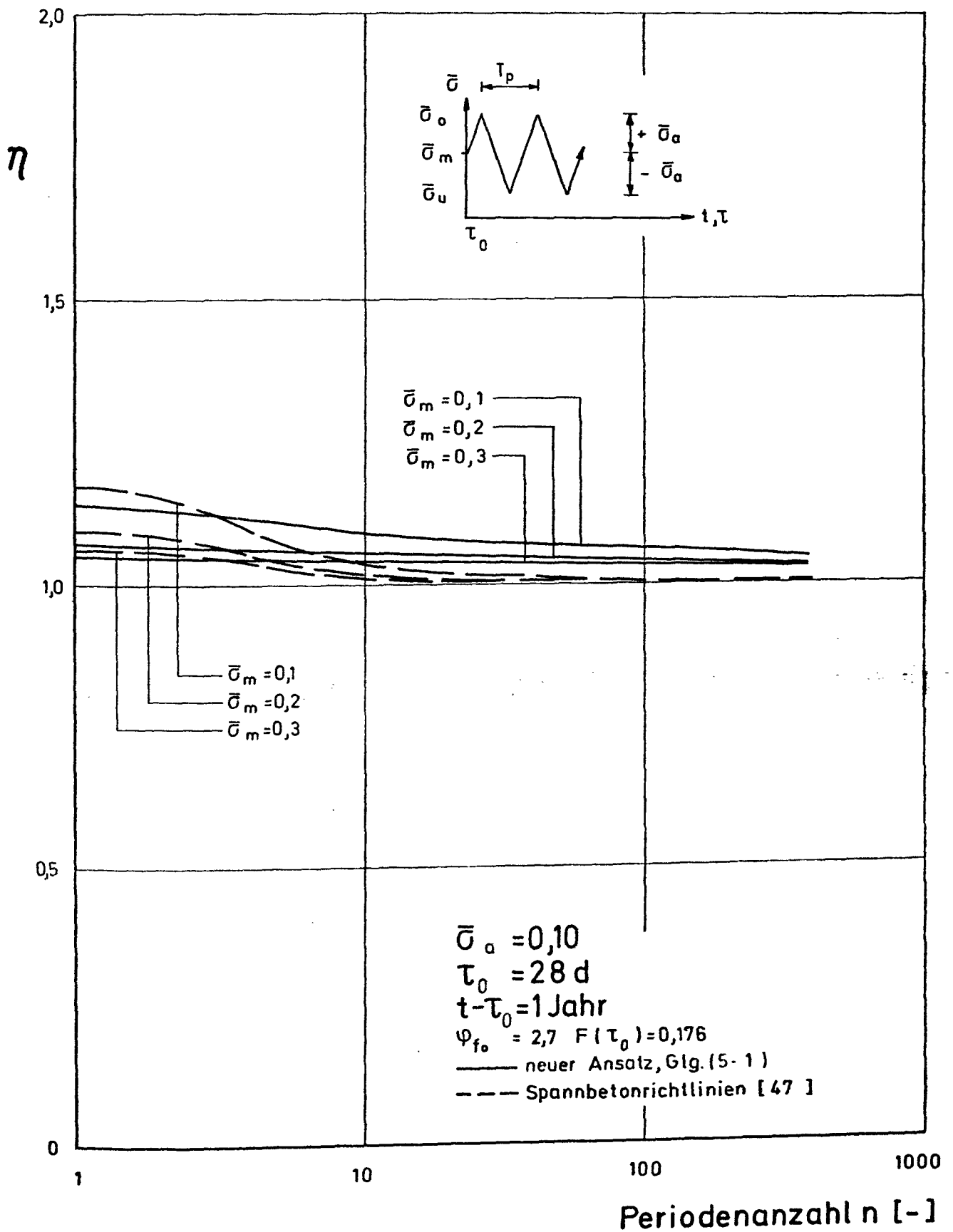


Bild 6-14 Abhängigkeit des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer in Abhängigkeit von der Periodenanzahl (Periodendauer) bei konstanter Spannungsamplitude und variabler Mittelspannung. Dreieckfunktion, großes σ_a .

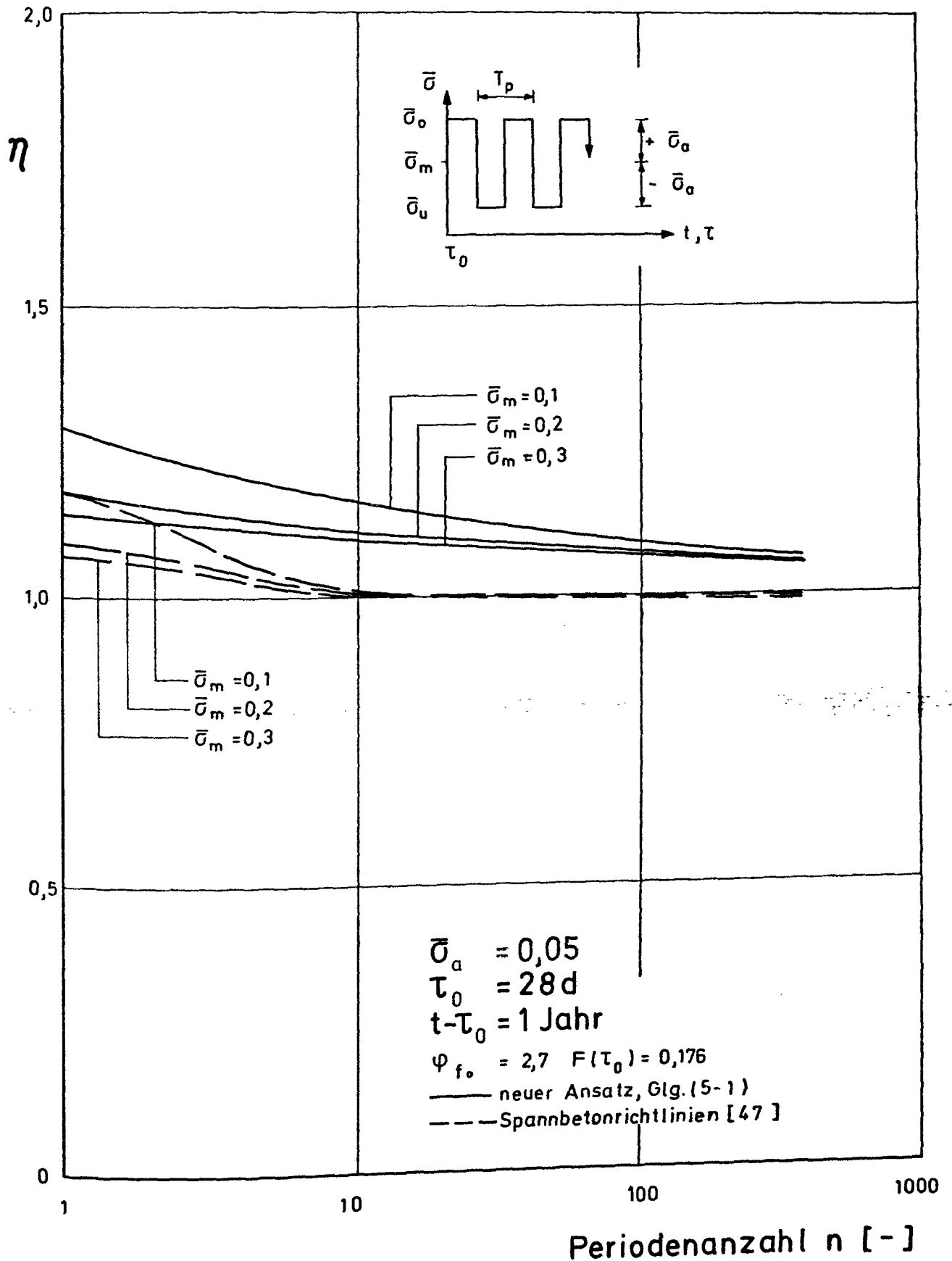


Bild 6-15 Abhängigkeit des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer in Abhängigkeit von der Periodenanzahl (Periodendauer) bei konstanter Spannungsamplitude und variabler Mittelspannung. Rechteckfunktion, kleines σ_a .

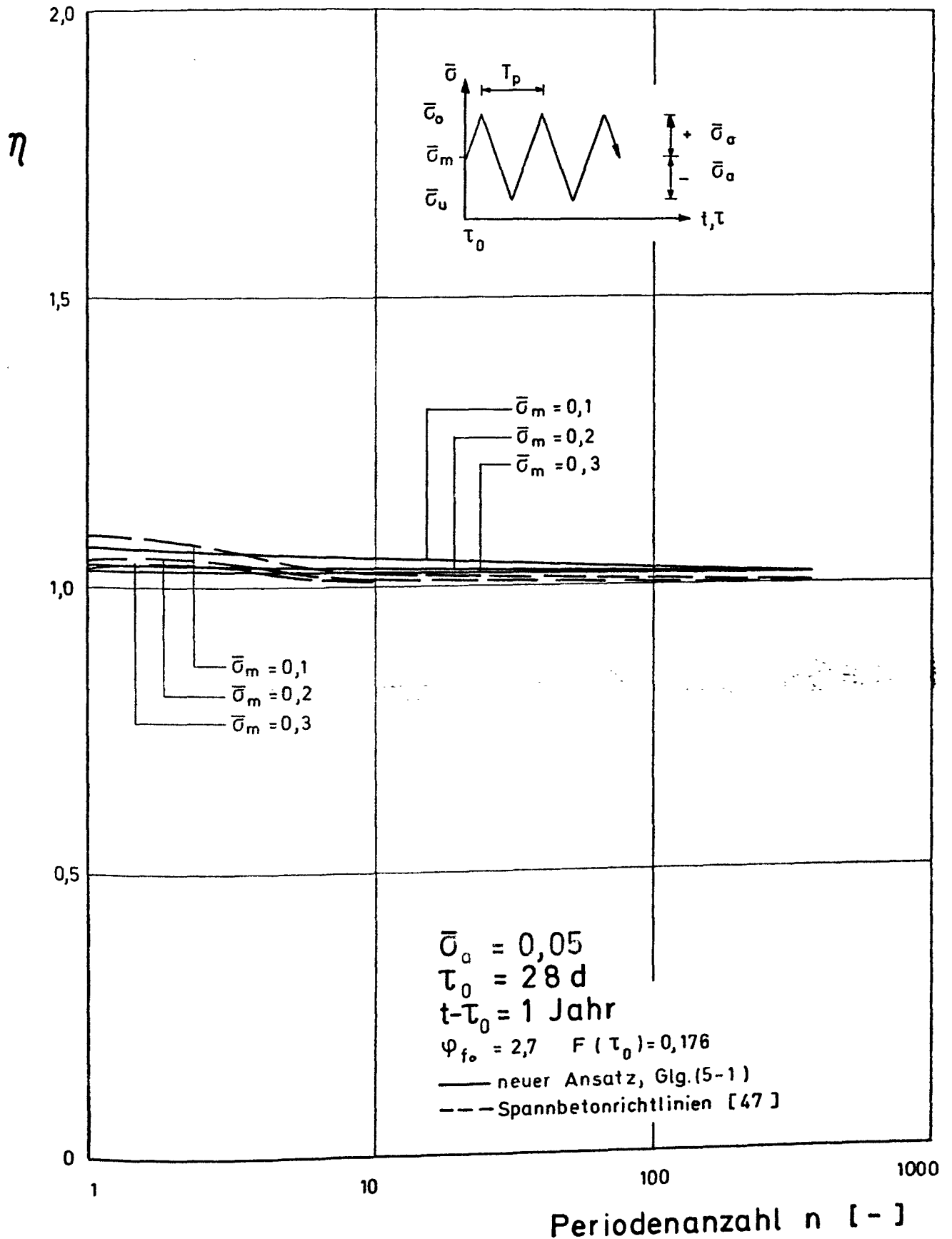


Bild 6-16 Abhängigkeit des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer in Abhängigkeit von der Periodenanzahl (Periodendauer) bei konstanter Spannungsamplitude und variabler Mittelspannung. Dreieckfunktion, kleines σ_a .

η -Wertes stellt. Da im vorliegenden Falle die Spannungen während der ersten Halbperiode größer als $\bar{\sigma}_m$ sind, ist der hierin aufgebaute Fließdehnungsanteil entscheidend. Dieser ist umso größer, je größer die Periodendauer T_p und je größer das Verhältnis $\bar{\sigma}_a/\bar{\sigma}_m$ ist. Beim neuen Ansatz wird das Verhältnis $\bar{\sigma}_a/\bar{\sigma}_m$ erheblich stärker gewichtet, da Fließen und Spannung vor allem in der ersten Halbperiode nichtlinear zusammenhängen. Daher wird in diesem Zeitabschnitt die Fließdehnung wesentlich vergrößert. Während der zweiten Halbperiode in der die Mittelspannung dauernd größer als die schwingende Spannung ist, kann dieser Effekt u. a. wegen der schwächeren Nichtlinearität nicht ganz rückgängig gemacht werden. Daher nehmen die η -Werte für den neuen Ansatz bei der größtmöglichen Periodendauer $T_p = t - \tau_0$ und bei der geringstmöglichen Mittelspannung $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_a$ ihren Maximalwert an. Dieser η -Wert ist wegen des Einflusses der Spannungen in der ersten Halbwelle bei einer Rechteckfunktion am größten. Bei einer Dreieckfunktion bzw. einer Sinusfunktion kann wegen der relativ geringen Veränderung des η -Wertes in erster Näherung eine Berechnung der Kriechdehnungen infolge Schwingbeanspruchung genügend genau durch die Auswirkung einer konstanten Mittelspannung in Analogie zu Abschnitt 6.2.2. erfaßt werden. Diese Aussage gilt umso eher, je kleiner die Spannungsamplitude ist (siehe Bild 6-16).

Auch bei einer Rechteckfunktion nehmen die η -Werte deutlich ab, wenn die Spannungsamplitude bei variierter Mittelspannung geringer angesetzt wird (siehe Bild 6-15). Der Abfall des η -Wertes mit zunehmender Frequenz erfolgt dann jedoch nicht mehr so rasch wie bei einer größeren Spannungsamplitude (siehe Bild 6-13).

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Bestimmung der Schwingkriechdehnungen durch Berechnung der Kriechdehnungen infolge $\sigma_m = \text{konst.}$ dann umso zutreffender ist, wenn es sich um eine Dreieck- oder Sinusschwingung handelt. Liegt eine Rechteckfunktion vor, kann die Vergrößerung des Schwingkriechfaktors η vor allem dann nicht mehr vernachlässigt werden, wenn die Periodendauer T_p und das Verhältnis $\bar{\sigma}_a/\bar{\sigma}_m$ groß sind.

6.2.4. Einfluß des Alters τ_0 bei Belastungsbeginn

Den prinzipiellen Einfluß des Zeitpunktes τ_0 , d. h. des Zeitpunktes, an dem die zyklische Belastungsgeschichte beginnt, zeigen die Bilder 6-17 und 6-18. Es wurde ein τ_0 -Wert von 1 Jahr gewählt. Die Beeinflussung der η -Werte durch τ_0 ergibt sich durch den Vergleich mit den Bildern 6-11 und 6-12.

Zunächst sollen die Schwingkriechfaktoren η bei Ansatz der Spannbetonrichtlinien diskutiert werden. Wie bereits in Abschnitt 3 bzw. 6.2.1. dargelegt, kommt hier die Schwäche dieses Ansatzes besonders deutlich zum Ausdruck. Obwohl φ_{fo} mit 2,7 sehr hoch angesetzt wird, ist der Fließdehnungsanteil bei $\tau_0 = 1$ Jahr auf Grund des speziellen Aufbaus der Fließfunktion in [47] so gering, daß die stoffmechanisch unsinnigen Aussagen der nicht-alternden verzögerten Elastizität bei der Anwendung auf zyklische Spannungsgeschichten voll zum Tragen kommen. Das Ergebnis ist, daß die η -Werte für $\tau_0 = 1$ Jahr immer kleiner 1 sind, d. h. das Kriechen unter $\sigma_m = \text{konst.}$ ist immer größer als das Schwingkriechen, wenn die Spannungsgeschichte beim letzteren mit σ_0 (Rechteck) bzw. σ_m aufsteigend (Dreieck) beginnt. Diese Aussage wird zudem noch verstärkt, je größer die Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a$ ist.

Den Erwartungen entsprechend hingegen ist der Verlauf der η -Werte, der sich nach dem neuen Ansatz ergibt. Qualitativ ergibt sich gleichartiges Verhalten für $\tau_0 = 28$ Tage (Bilder 6-11 und 6-12) und für $\tau_0 = 365$ Tage (Bilder 6-17 und 6-18). Die η -Werte sind größer als 1,0 und umso größer, je größer die Periodendauer und je größer die Spannungsamplitude ist. Lediglich die Absolutgröße und die Abnahme des η -Wertes mit zunehmender Frequenz ist geringer bzw. weniger ausgeprägt als bei $\tau_0 = 28$ Tage. Dies ist vor allem auf den kleiner gewordenen Fließanteil infolge Alterung des Fließpotentials $F(\tau_0)$ zurückzuführen, so daß das stoffmechanische Verhalten für $\tau_0 = 1$ Jahr qualitativ und quantitativ mehr dem Verhalten eines Festkörpers nahekommt als für $\tau_0 = 28$ Tage.

Auch bei $\tau_0 = 1$ Jahr ergibt sich für eine Dreiecksfunktion die Aussage, daß das Schwingkriechen sehr gut durch das Kriechen infolge $\bar{\sigma}_m = \text{konst.}$ beschrieben werden kann.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß ein späterer Belastungsbeginn an den qualitativen Aussagen des neuen Ansatzes in den vorangegangenen Abschnitten nichts ändert, sondern lediglich die quantitative Aussage modifiziert bzw. verringert. Bei einem Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien ergeben sich

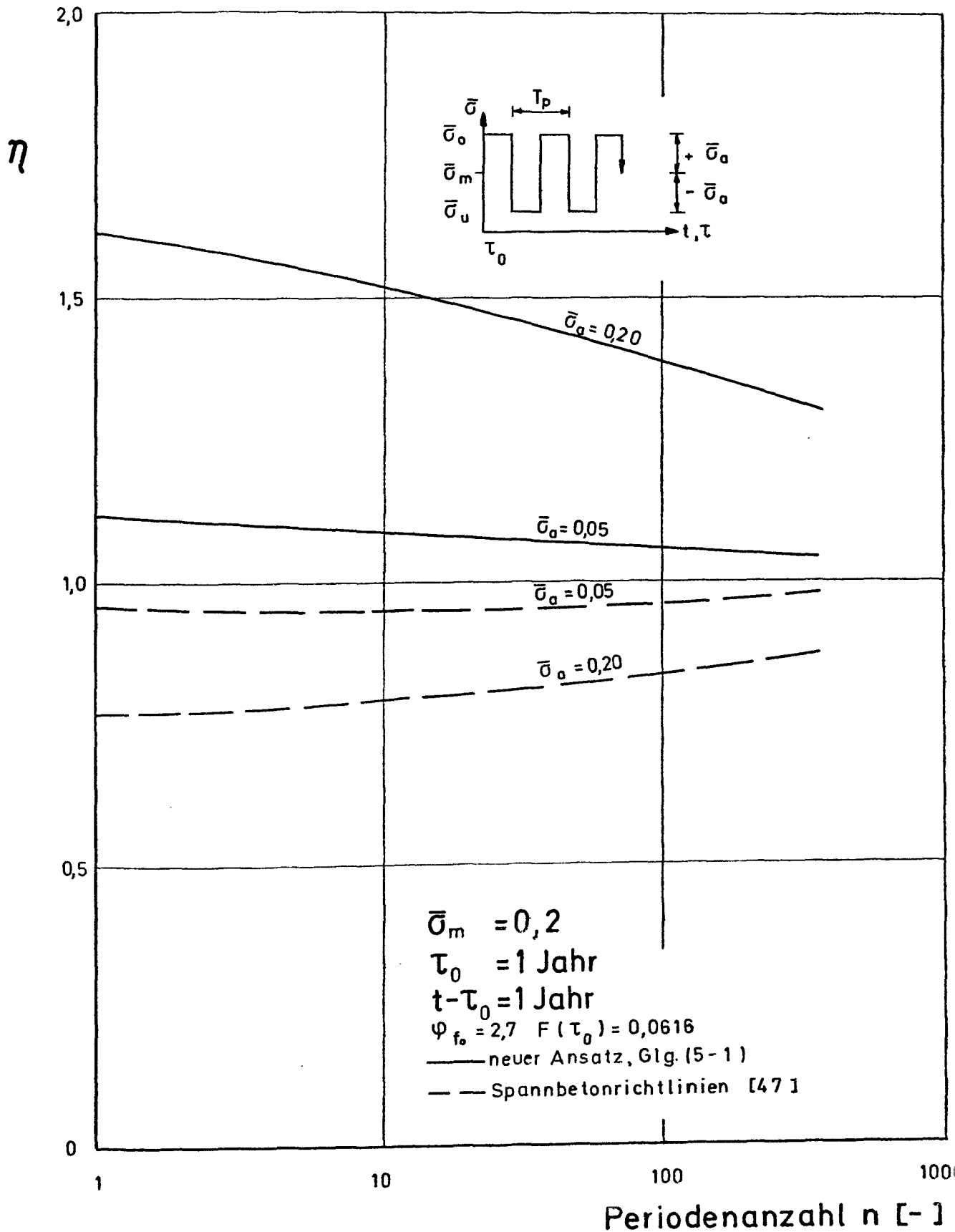


Bild 6-17 Beeinflussung des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer durch späten Belastungsbeginn (großes τ_0). Rechteckfunktion.

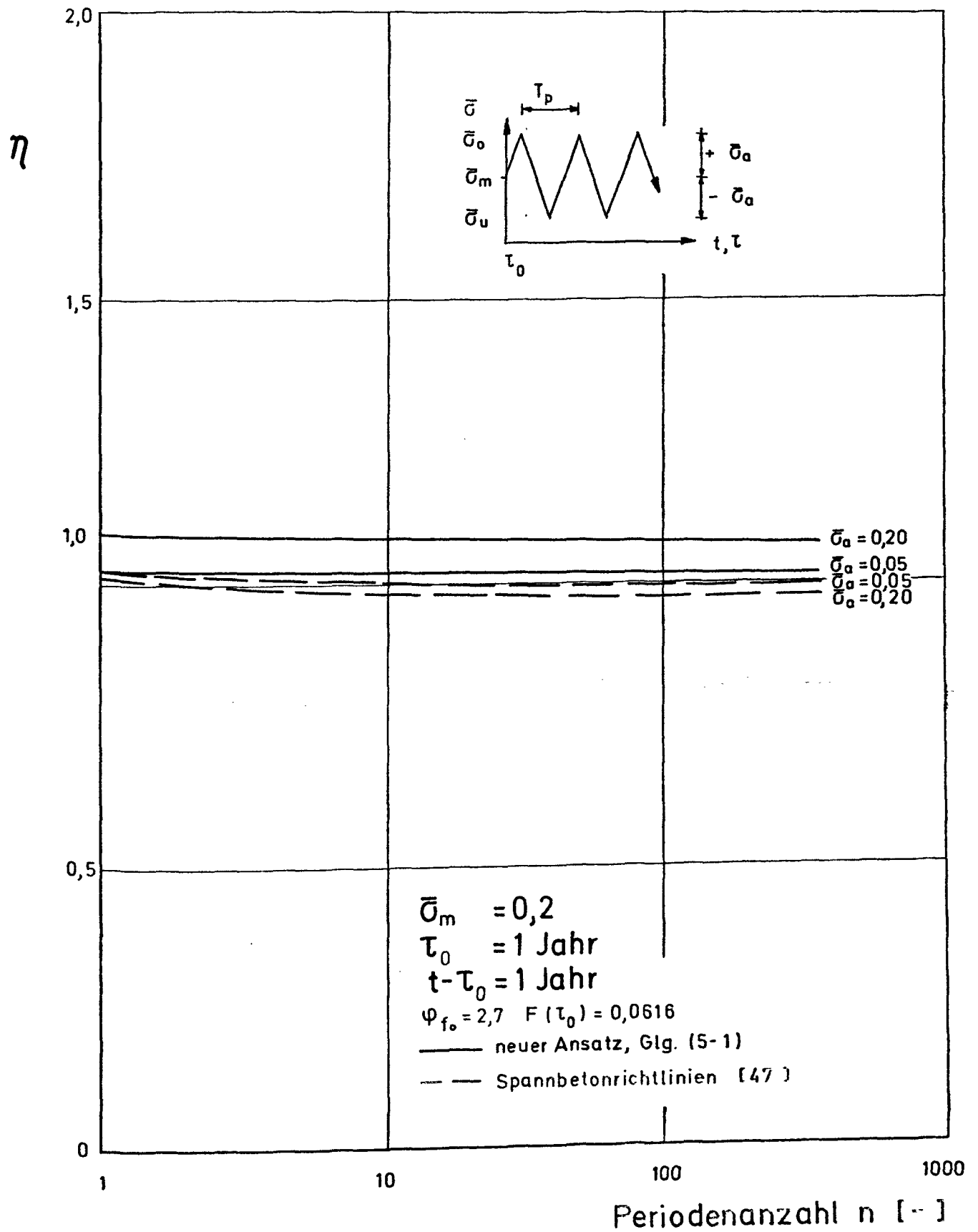


Bild 6-18 Beeinflussung des Schwingkriechfaktors η für konstante Belastungsdauer durch späten Belastungsbeginn (großes τ_0), Dreieckfunktion.

hingegen die aus Abschnitt 3. bekannten stoffmechanischen Fehleinschätzungen bezüglich des Schwingkriechfaktors η .

6.2.5. Einfluß der Art des Beginns der Spannungsgeschichte

In den bisherigen Ausführungen des Abschnittes 6. wurde bei den periodischen Spannungsgeschichten immer Bild 6-3 zugrunde gelegt, d. h. die Spannungsgeschichte begann bei der Rechteckfunktion mit $\bar{\sigma}_0$ während der ersten Halbperiode und bei Dreieck- bzw. Sinusfunktion ab $\bar{\sigma}_m$ aufsteigend.

Hinsichtlich des Schwingkriechfaktors η wurde gezeigt, daß dieser beim neuen Ansatz und zumeist auch beim Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien bei vorgegebener Belastungsdauer dann ihren Maximalwert annimmt, wenn die Frequenz einem Minimum bzw. die Periodendauer einem Maximum, nämlich der Belastungsdauer, entspricht. Entscheidende Bedeutung kam hierbei den Spannungen (Höhe, Einwirkungsdauer, Völligkeit etc.) während der ersten Halbperiode zu. Für die η -Werte ist es daher nicht ohne Belang, wie die Belastungsgeschichte beginnt. Die drei noch möglichen, von Bild 6-3 abweichenden Fälle sollen daher im folgenden analysiert werden. Für die Untersuchung des Einflusses der Art des Beginns der Spannungsgeschichte wurde von sonst gleichen Daten wie bei den Bildern 6-11 und 6-12 ausgegangen. Das Ergebnis, der Schwingkriechfaktor η in Abhängigkeit von der Frequenz bzw. der Periodendauer (-anzahl), ist bei variierter Spannungsamplitude in den Bildern 6-19 bis 6-21 dargestellt.

Bild 6-19 kann direkt mit den Bildern 6-11 und 6-12 verglichen werden. Analog den Erkenntnissen des Abschnittes 3 ergeben sich für den Ansatz gemäß den Spannbetonrichtlinien die bereits bekannten η -Werte, die für $t - \tau_0 = 1$ Jahr alle kleiner als 1,0 sind, wenn der Beginn der Belastungsgeschichte gemäß Bild 6-19 erfolgt, und größer als 1,0, wenn der Beginn der Belastungsgeschichte entsprechend Bild 6-3 erfolgt.

Die Auswertung mit dem neuen Ansatz bei Beginn gemäß Bild 6-3 bzw. 6-11 und 6-12 wurde bereits in Abschnitt 6.2.2. besprochen. Die η -Werte für einen Beginn der Spannungsgeschichte nach Bild 6-19 sind, wie erwartet, gleich oder geringfügig kleiner als eins, jedoch mit einer Ausnahme. Diese betrifft das Verhalten bei Vorgabe einer Rechteckspannungszeitfunktion mit $\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_m$. In diesem Fall beginnt die eigentliche Belastungsgeschichte erst nach $\tau'_0 = \tau_0 + T_p/2$. Dies ist bei der Ermittlung der Fließdehnungen bei periodischer Span-

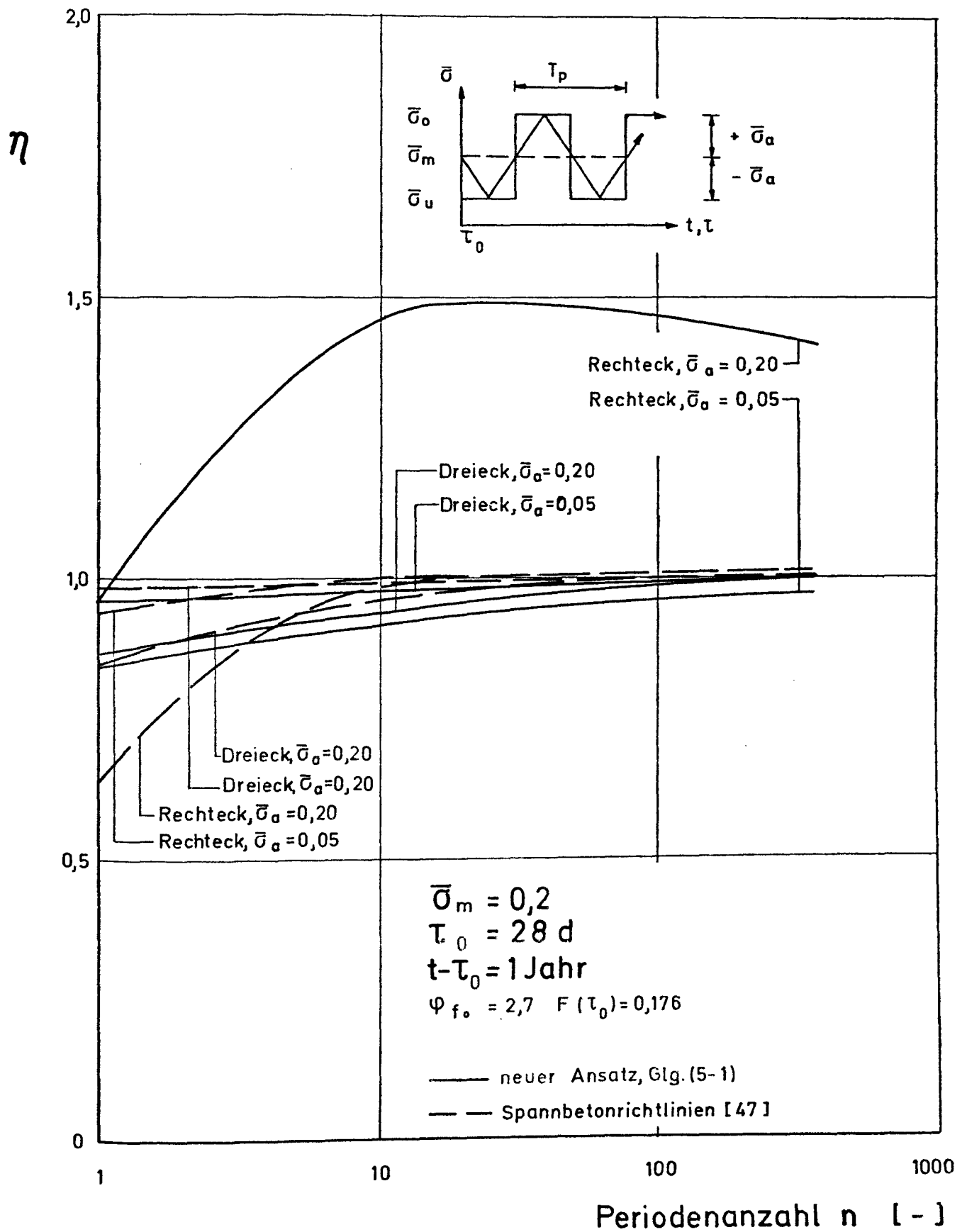


Bild 6-19 Schwingkriechfaktor η für konstante Belastungsdauer und Beginn der Spannungsgeschichte mit σ_u bzw. σ_m (absteigend).

nungsgeschichte zu berücksichtigen. Der Schwingkriechfaktor η verhält sich daher im Bereich einer Periodendauer zwischen 1 Tag und 1 Monat ($n = 360$ bis 12) relativ konstant mit $\eta \approx 1,45$. Der Einfluß der Nichtlinearität des Fließens übertrifft in diesem Bereich die Abnahme der Fließdehnung infolge Alterung des Fließpotentials. Für eine Periodendauer größer als etwa 1 Monat wird dann der Einfluß der Alterung des Fließpotentials immer stärker, so daß die η -Werte mit zunehmender Periodendauer stark abfallen.

Bei relativ kurzer Periodendauer $T_p = 1$ Tag ($n = 360$) spielt die Alterung des Fließpotentials noch keine Rolle, so daß sich hier praktisch gleiche η -Werte ergeben, wie der Vergleich von Bild 6-11 und 6-19 zeigt. Die geringfügigen Unterschiede rühren dann aus dem unterschiedlichen Vorzeichen des ϵ_v -Anteiles bei Schwingbeanspruchung her (siehe Abschnitt 3).

Interessant ist an dieser Stelle ein Vergleich zwischen Rechnung und Versuch. Von Kwong [90] wurden in einer Versuchsserie beide Formen der Rechteckspannungs-Zeitfunktion untersucht. Der zeitliche Verlauf der Spannungsgeschichte ist zur Veranschaulichung in Bild 6-20 nochmals dargestellt.

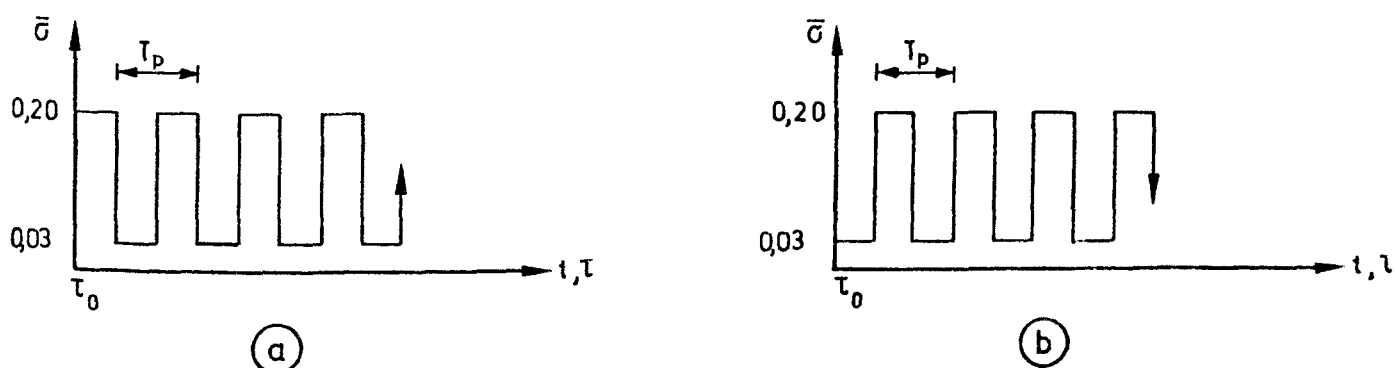


Bild 6-20 Schematische Rechteck-Spannungsgeschichte mit unterschiedlichem Beginn [90].

Der Zeitpunkt des Belastungsbeginns war $\tau_0 = 28$ Tage, die Periodendauer $T_p = 2$ Tage, die Belastungsdauer $t - \tau_0 = 30$ Tage, die Oberspannung $\bar{\sigma}_o = 0,20$ und die Unterspannung $\bar{\sigma}_u = 0,03$.

Bezieht man die unter der Spannungsgeschichte 6-20a nach 30 Tagen Belastungsdauer gemessene Kriechdehnung auf die gemäß Bild 6-20b gemessene Kriechdehnung, so erhält man eine anschauliche Vergleichsgröße. Diese Größe kann man

vergleichen mit dem Quotienten der Schwingkriechfaktoren η für die einzelnen Spannungsgeschichten, da diese ja auf einen gemeinsamen Nenner, nämlich die Kriechdehnung infolge $\bar{\sigma}_m = \text{konst.}$ bezogen sind. Der Vergleich ist in Tabelle 6-2 durchgeführt.

Tabelle 6-2: Kriechdehnungsvergleich nach 30 Tagen Belastungsdauer für Spannungsgeschichten nach Bild 6-20. Versuchsergebnisse von Kwong [90].

Experiment $\epsilon_k^{(a)} / \epsilon_k^{(b)}$	neuer Ansatz (5-1) $\eta^{(a)} / \eta^{(b)}$	Spannbetonricht- linien [47] $\eta^{(a)} / \eta^{(b)}$	Produktansatz [33] $\eta^{(a)} / \eta^{(b)}$
1,24	1,29	0,83	0,80

Wie man sieht, stimmt der mit dem neuen Ansatz ermittelte Wert recht gut mit dem experimentellen Wert überein. Wie zu erwarten, sind diese Werte größer als 1,0, d. h. das Kriechen nach 30 Tagen Belastungsdauer infolge Spannungsgeschichte (a) ist größer als dasjenige infolge (b) . Diese Aussage erhält man jedoch weder nach den Spannbetonrichtlinien noch nach DIN 1045 [33] (Produktansatz). In beiden Fällen sind die Quotienten $\eta^{(a)} / \eta^{(b)}$ kleiner als eins und deswegen unrealistisch.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie sich eine Phasenverschiebung der Spannungsgeschichten gemäß den Bildern 6-21 und 6-22 (siehe Schemaskizzen in den Bildern) auf die η -Werte auswirkt, d. h. die Dreieckfunktion beginnt mit $\bar{\sigma}_0$ (Bild 6-21) bzw. mit $\bar{\sigma}_u$ (Bild 6-22). Zum Vergleich ist wiederum der η -Verlauf gemäß Spannbetonrichtlinien eingezeichnet. Auf diese η -Werte braucht nicht mehr näher eingegangen zu werden.

Die η -Werte für den neuen Ansatz verhalten sich für eine Rechteckfunktion ähnlich wie die bisher untersuchten Arten des Beginns der Spannungsgeschichte, wie ein Vergleich von Bild 6-21 mit 6-11 und von Bild 6-22 mit 6-19 zeigt.

Vergleicht man jedoch für eine Dreieckfunktion die Bilder 6-21 und 6-12 bzw. 6-22 und 6-19, so ergeben sich deutliche Unterschiede, und zwar dann, wenn die Spannungsamplitude $\bar{\sigma}_a$ groß ist. Bei Beginn der Spannungsgeschichte mit

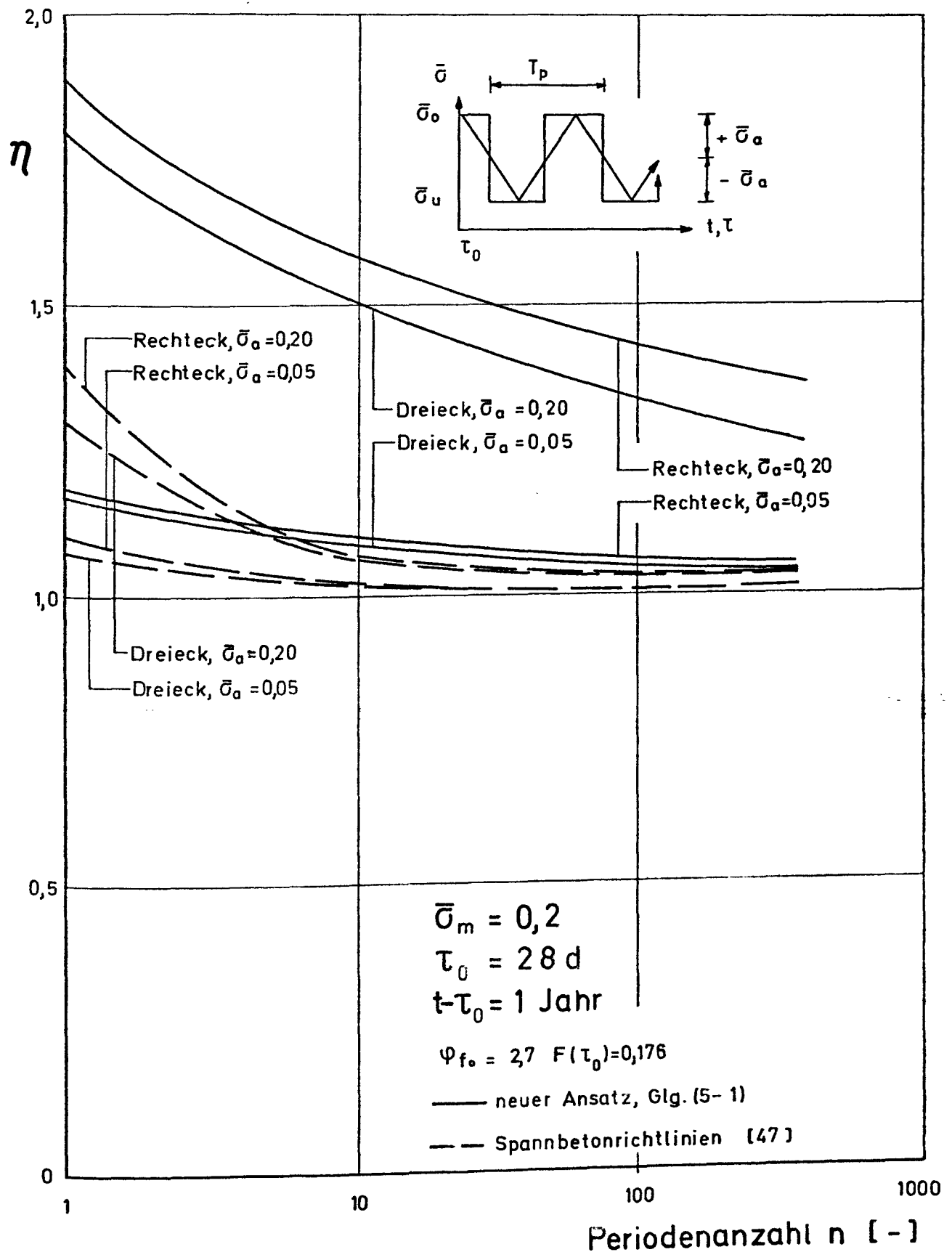


Bild 6-21 Schwingkriechfaktor η für konstante Belastungsdauer und Beginn der Spannungsgeschichte mit $\bar{\sigma}_o$.

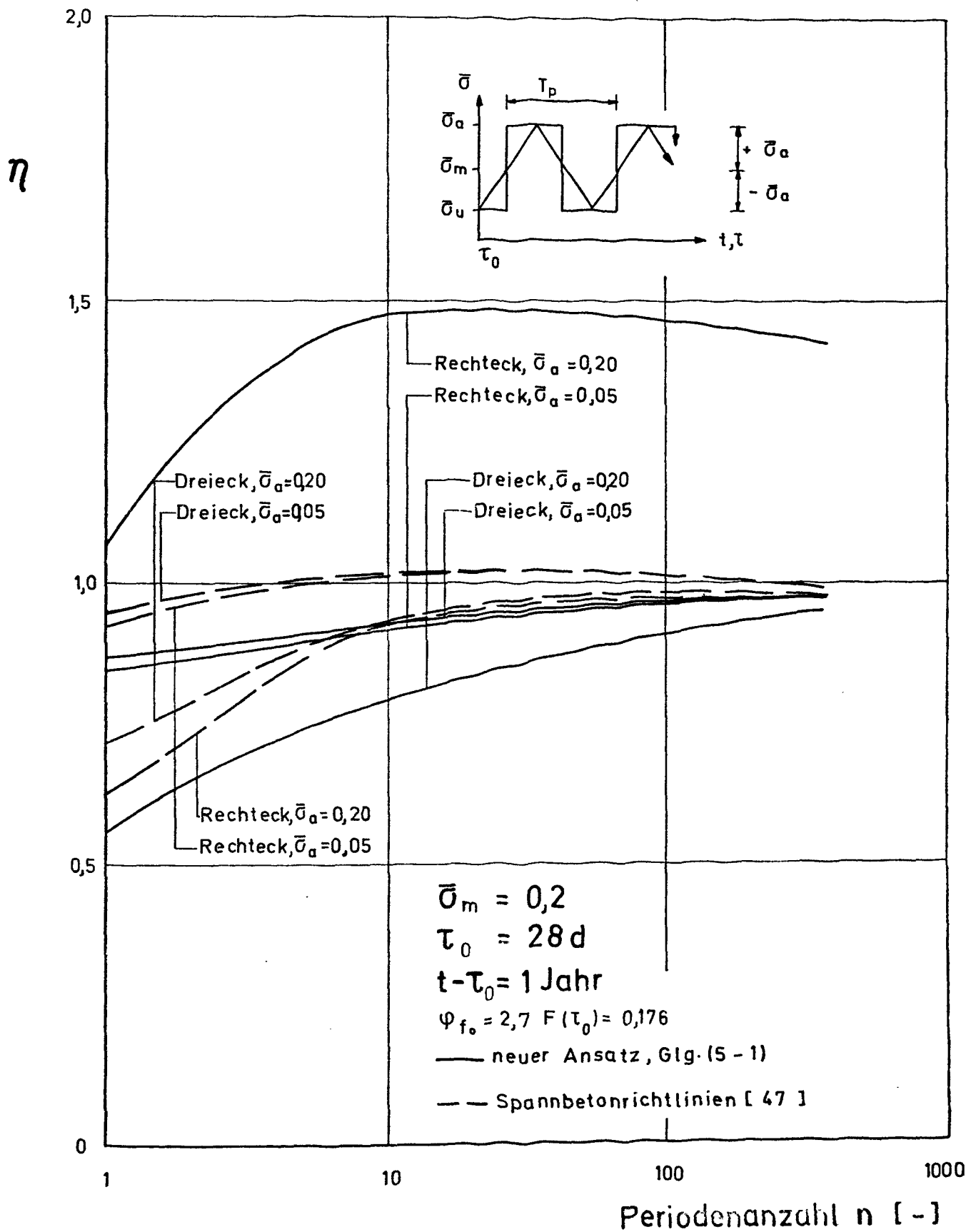


Bild 6-22 Schwingkriechfaktor η für konstante Belastungsdauer und Beginn der Spannungsgeschichte mit $\bar{\sigma}_u$.

$\bar{\sigma}_0$ (Bild 6-21) sind die η -Werte für $\bar{\sigma}_a = 0,20$ (Dreieck) wesentlich größer als die vergleichbaren Werte in Bild 6-12. Dies ist auf das stärkere Fließen bei Beginn mit $\bar{\sigma}_0$ während der ersten Viertelperiode, vor allem bei großer Periodendauer, zurückzuführen. Bei Beginn mit $\bar{\sigma}_u$ (Bild 6-22) hingegen tritt der umgekehrte Effekt ein. Die η -Werte für $\bar{\sigma}_a = 0,20$ (Dreieck) sind deutlich kleiner als die Vergleichswerte in Bild 6-19.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Art des Beginns der Spannungsgeschichte immer dann eine wesentliche Rolle spielt, wenn Periodendauer und Spannungsamplitude groß sind. Versucht man das Schwingkriechen in diesen Fällen durch das Kriechen infolge $\sigma_m = \text{konst.}$ zu beschreiben, so unterschätzt man das Schwingkriechen zum Teil beträchtlich, wenn die Spannungsgeschichte mit $\bar{\sigma}_0$ bzw. $\bar{\sigma}_m$ (aufsteigend) beginnt. Man überschätzt das Schwingkriechen dann, wenn die Spannungsgeschichte mit $\bar{\sigma}_u$ bzw. $\bar{\sigma}_m$ (absteigend) beginnt. Als ein Sonderfall muß hierbei jedoch die Rechteckspannungszeitfunktion behandelt werden, wenn wegen $\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_m$ die Unterspannung $\bar{\sigma}_u = 0$ ist und τ_0 durch $\tau'_0 = \tau_0 + T_p/2$ bzw. $\tau'_0 = \tau_0 + T_p/4$ zu ersetzen ist.

6.3. Dämpfung

Bei der Untersuchung von Werkstoffen unter zyklischer Belastung tritt während jedes Lastwechsels durch den Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie ein Energieverbrauch auf. Dieser Energieverbrauch macht sich auf verschiedene Art bemerkbar, so z. B. durch das Auftreten einer Hysteresisschleife im Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei erzwungener Schwingung, wie sie in Bild 6-23 schematisch dargestellt ist. Der Flächeninhalt A der Hysteresisschleife kennzeichnet die Dämpfung des Materials und ist somit ein Maß für die Dissipationsvorgänge, die sich während eines Belastungszyklus abspielen. Die Energie-dissipationsvorgänge können mannigfaltige Ursachen haben: z. B. Wärmedissipation, innere Dissipation durch Platzwechsel von Teilchen in amorphen und "technisch" amorphen Stoffen oder Dissipation in Oberflächenenergie, begleitet von Gleitprozessen im Verlauf der Bildung und Fortpflanzung von Mikrorissen etc. Die Materialdämpfung im Beton muß daher im hohen Maße von der Frequenz abhängen, insbesondere dann, wenn die Frequenzen innerhalb des Bereiches liegen, der in dieser Arbeit untersucht werden soll. Dies stellten

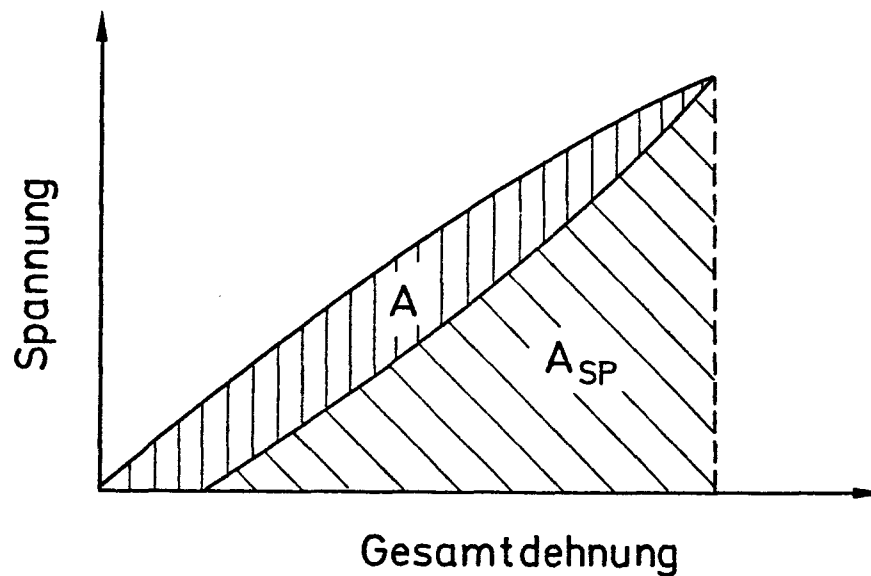


Bild 6-23 Schematisches Spannungs-Dehnungsdiagramm für Dreieckfunktion im ersten Zyklus.

auch bereits Frank und Kunze [131] fest. Die Hysteresisschleifenfläche A (siehe Bild 6-23) wird in der Literatur oft in bezogener Form ausgedrückt, wobei unterschiedlich vorgegangen wird (siehe z. B. [131, 99, 93]). Die Ermittlung des Verlustfaktors d (z. B. $d = A/A_{SP}$) als kennzeichnende Größe der Dämpfung (siehe z. B. [99]) ist deshalb außerordentlich schwierig, weil bei langsamen Frequenzen ($f < 10^{-1}$ Hz) zumeist nicht davon ausgegangen werden kann, daß die Hysteresisschleife die Form einer Ellipse hat (siehe z. B. Versuchsergebnisse in [93]). Die (zeitlich veränderlichen) Dämpfungswerte kennzeichnen die Materialstruktur nur zu einem bestimmten Zeitpunkt. Nimmt A mit zunehmender Periodenanzahl ebenfalls zu, so ist dies zumeist ein Indiz dafür, daß ein Probenbruch zu erwarten ist. Liegt die aufgebrachte Maximalspannung unterhalb der Dauerschwing- bzw. Dauerstandfestigkeit, so nimmt A mit wachsendem n monoton ab und scheint einem Grenzwert zuzustreben. Der Abfall von A erfolgt sehr rasch, wie die Versuchsergebnisse von Rostásy und Alda [93] zeigen.

Von jeder Kriechtheorie, die es sich zum Ziel setzt, Dehnungsvoraussagen infolge variabler (zyklischer) Spannung zu machen, muß gefordert werden, daß sie dieses oben erwähnte stoffkundliche Verhalten zu beschreiben vermag. Neville [136] gibt z. B. nach 120 Lastperioden einen Abfall der Hysteresisfläche und damit des Verlustfaktors auf etwa 35 % des Anfangswertes A im

1. Lastwechsel an. Von Rostásy und Alda [93] wurde ein noch stärkerer Abfall des Energieverlustes beobachtet. Bereits nach 20 Perioden (Dreieckspannungszeitfunktion) betrug der Energieverlust je Zyklus nur noch weniger als 30 % des Energieverlustes im 1. Lastwechsel, und zwar bei einer Frequenz von 10^{-3} Hz und $\bar{\sigma}_0 \approx 0,3$.

Um einen Vergleich von Rechnung und Versuch durchführen zu können, wurde ein Rechenprogramm zur Bestimmung des Flächeninhaltes der Hysteresisfläche bei Vorgabe der Integralgleichung für das Schwingkriechen aufgestellt. Bild 6-24 zeigt das Ergebnis am Beispiel der Dreieckfunktion. Ausgehend von den in [93] vorliegenden Bedingungen ist der Verlauf der auf den Anfangswert A bezogenen Hysteresisfläche $A(n)$ dargestellt. Als Periodendauer wurde $T_p = 1$ Tag ($f = 1,1 \cdot 10^{-5}$ Hz) und $T_p = 0,05$ Tage ($f = 0,23 \cdot 10^{-3}$ Hz) gewählt. Der Verlauf

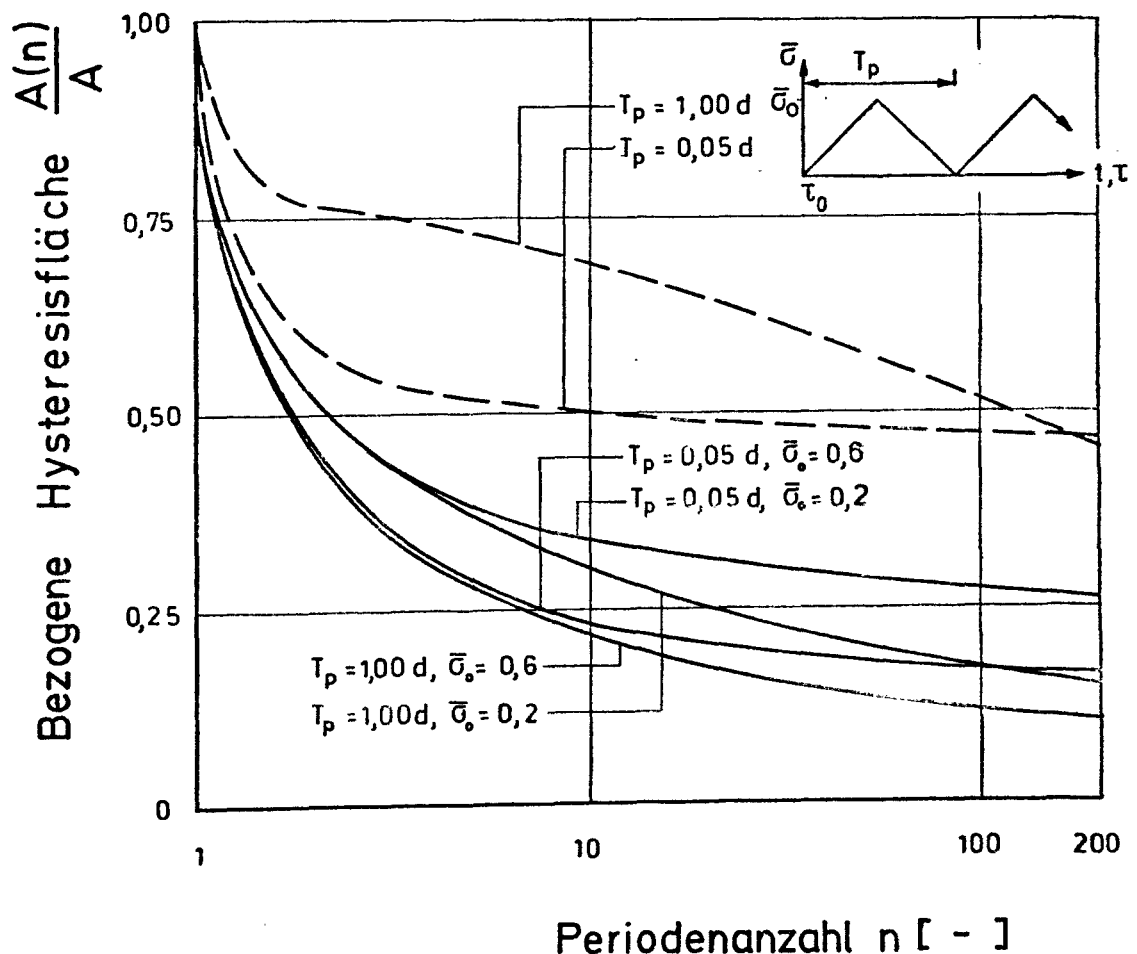


Bild 6-24 Abfall des Energieverlustes je Lastzyklus in Abhängigkeit von der Periodenanzahl. Dreieckfunktion.

— Ansatz Glg. (5-1).

- - - Spannbetonrichtlinien [47].

von $\frac{A(n)}{A}$ für $T_p = 0,05$ Tage ist also näherungsweise vergleichbar mit dem Ergebnis in [93]. Bei Ansatz von Glg. (5-1) ergab sich für $n = 20$ und $\bar{\sigma}_0 = 0,6$ ein Abfall des Energieverlustes im 20. Lastzyklus auf etwa 21 % des Energieverlustes A im ersten Lastzyklus und ein solcher auf 31 % für $\bar{\sigma}_0 = 0,2$. Die Ergebnisse der neuen Theorie liefern also ein dem Experiment äquivalentes Ergebnis, das bei einer Rechnung gemäß Spannbetonrichtlinien nicht erreicht werden kann, wie Bild 6-24 (strichlierte Kurven) zeigt. Im übrigen ergeben sich gemäß Spannbetonrichtlinien die Kurven $\frac{A(n)}{A}$ immer gleich, unabhängig davon, wie groß die Oberspannung vorgegeben wird. Bei Ansatz von Glg. (5-1) hingegen ist der Abfall des Energieverlustes dann stärker, wenn die Oberspannung höher angesetzt wird. Eine größere Periodendauer hat im Gegensatz zu den Spannbetonrichtlinien den gleichen Effekt.

Die Ursache für das Ergebnis gemäß Spannbetonrichtlinien, das nicht mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt, ist wie bereits erwähnt das zu geringe Anfangsfließen. Dies vermeidet hingegen die neue Theorie und erklärt damit die von Rüscher, Jungwirth und Hilsdorf eingeführte "rasche Anfangsverformung ϵ_a " (siehe [4]) als ein viskoses Fließen, das nur bei einem "jungfräulichen", d. h. nicht vorbelasteten Beton auftritt.

Eine qualitativ ähnliche Aussage wie bei der Dreiecksspannungszeitfunktion erhält man für eine zyklische Spannungsgeschichte gemäß einem Sinusverlauf, wie aus Bild 6-25 zu ersehen ist. Der Abfall des Energieverlustes ist hier jedoch nicht so stark.

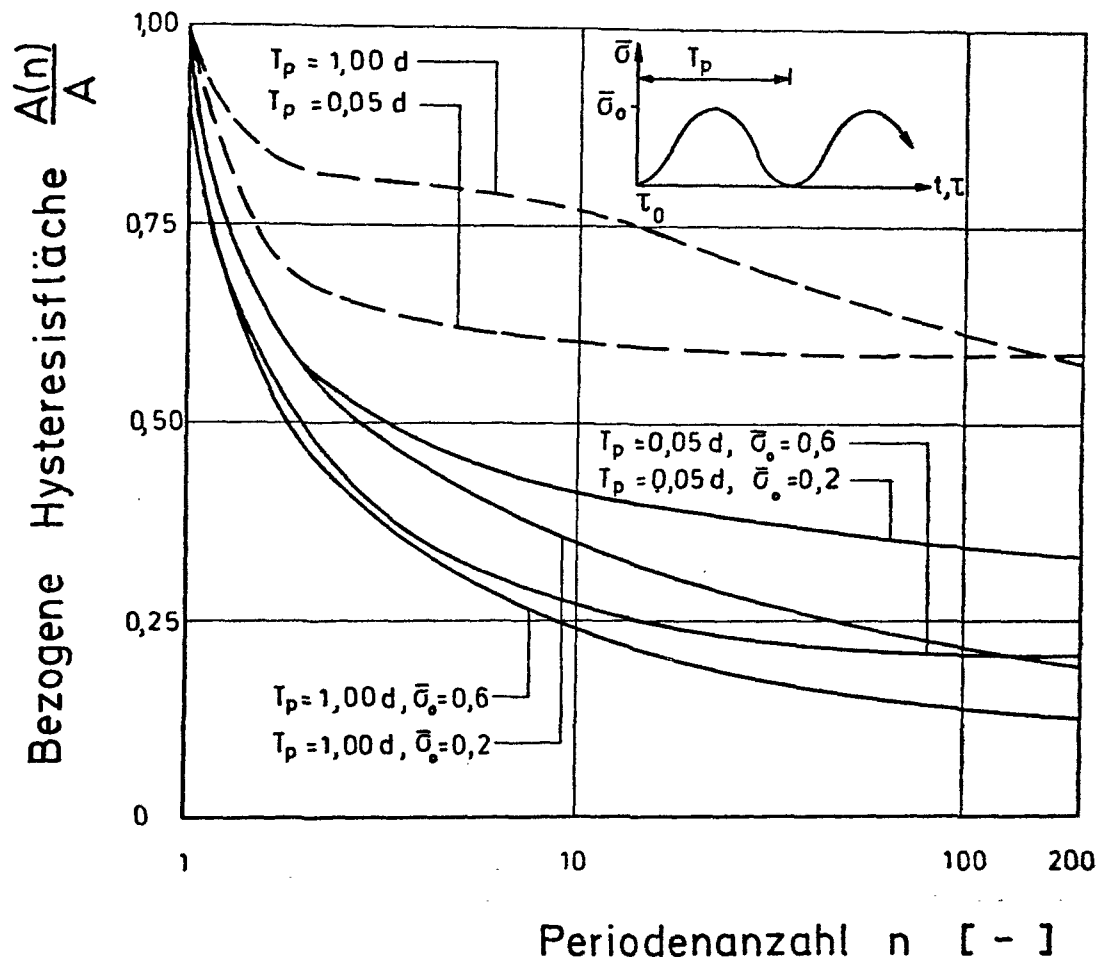


Bild 6-25 Abfall des Energieverlustes je Lastzyklus in Abhängigkeit von der Periodenanzahl. Sinusfunktion.

— Ansatz Glg. (5-1).
 — — Spannbetonrichtlinien [47].

6.4. Relaxation

Kriechen, Schwingkriechen und Relaxation sind Phänomene, die - wie bereits erwähnt wurde - auf eine grundsätzlich gleiche Verhaltensweise zurückgeführt werden können.

Der neue Ansatz, die Integralgleichung (5-1), muß daher auch in der Lage sein, die "Antwort" des Betons auf die Vorgabe einer "Erregerfunktion" $\epsilon(t) = \text{konst.}$ sinnvoll und den Versuchsergebnissen entsprechend zu beschreiben, die sich in

der Form der Relaxationskurve $\sigma_R(t)$ ergibt. Sinnvollerweise wird $\sigma_R(t)$ meist in der bezogenen Form $\sigma_R(t)/\sigma_0 \leq 1$ dargestellt.

Grundsätzlich kann aus der Integralgleichung (5-1) auch eine Differentialgleichung 2. Ordnung abgeleitet werden, die dann für $\varepsilon(t) = \text{konst.}$ nach σ aufzulösen wäre. Eine geschlossene Lösung ist jedoch schon für die verzögerte Elastizität (alternd) allein nicht mehr möglich (s. Abschnitt 3). Es wird daher von vornherein ein anderer Weg beschritten, der darin liegt, sich die Relaxationskurve auf iterativem Wege zu ermitteln.

Für die Spannbetonrichtlinien wurde nach der von Haas [30] vorgeschlagenen Methode vorgegangen, die darin besteht, den Beobachtungszeitraum (die Belastungsdauer) in Zeitintervalle zu unterteilen und durch stufenweise Korrektur der Spannung σ in der Mitte dieser Zeitintervalle die Dehnungskonstanz zu erzwingen. Zur Vermeidung unnötig hohen Rechenaufwandes können diese Zeitintervalle bei Belastungsbeginn sehr fein und später gröber angesetzt werden.

Für den neuen Ansatz wurde im Prinzip in gleicher Weise vorgegangen. Es taucht hier jedoch die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß im dritten Glied der Integralgleichung (5-1) (Fließanteil) die Spannung $\sigma(t)$ auch in der Fließfunktion selbst auftritt. Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch durch eine Iteration mit Vorgabe einer genügend kleinen Fehlerschranke beheben. Das Verfahren wurde ebenfalls programmiert. Die Bilder 6-26 und 6-27 zeigen Beispiele für das Ergebnis. Es wurde von $d_w = 10$ cm und $\phi_{fo} = 2,0$ bzw. $F(\tau_0) = 0,13$ für $\tau_0 = 28$ Tage ausgegangen. Da die Spannung bekanntermaßen vor allem unmittelbar nach Belastungsbeginn sehr stark abgebaut wird, ist es wichtig, die Relaxationskurven im logarithmischen Zeitmaßstab darzustellen. Im Bild 6-26 wurde daher der Zeitbereich von 10^{-2} Tagen bis 10^3 Tage (ca. 3 Jahre) verfolgt. Beim Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien ergibt sich unabhängig von der Größe der Anfangsspannung σ_0 nur eine einzige Relaxationskurve. Sie zeigt zu Beginn bis $t - \tau_0 \approx 10$ Tage nur einen relativ schwachen Spannungsabfall, dann erfolgt ein Steilabfall und schließlich die asymptotische Annäherung an $\sigma_{R\infty}/\sigma_0$, da sowohl die Zeitfunktion der verzögerten Elastizität als auch die Zeitfunktion für das Fließen einen Grenzwert besitzen. Für den neuen Ansatz hingegen ergibt sich eine Relaxationskurvenschar mit $\bar{\sigma}_0$ als Parameter, die theoretisch

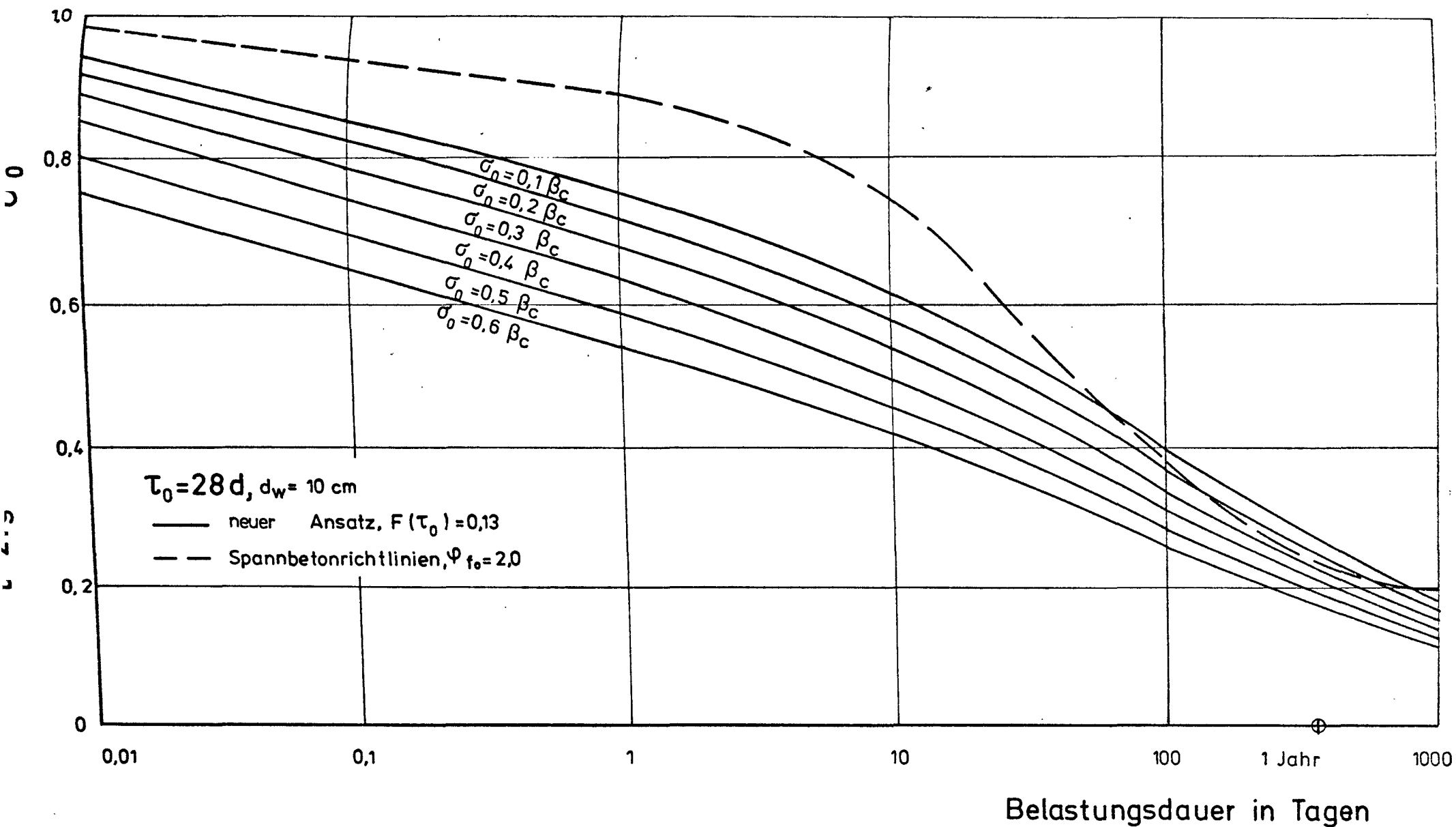


Bild 6-26 Spannungsrelaxation für $\epsilon_0 = \text{konst.}$ Vergleich von neuem Ansatz und Spannbetonrichtlinien.
 Belastungsbeginn nach 28 Tagen.

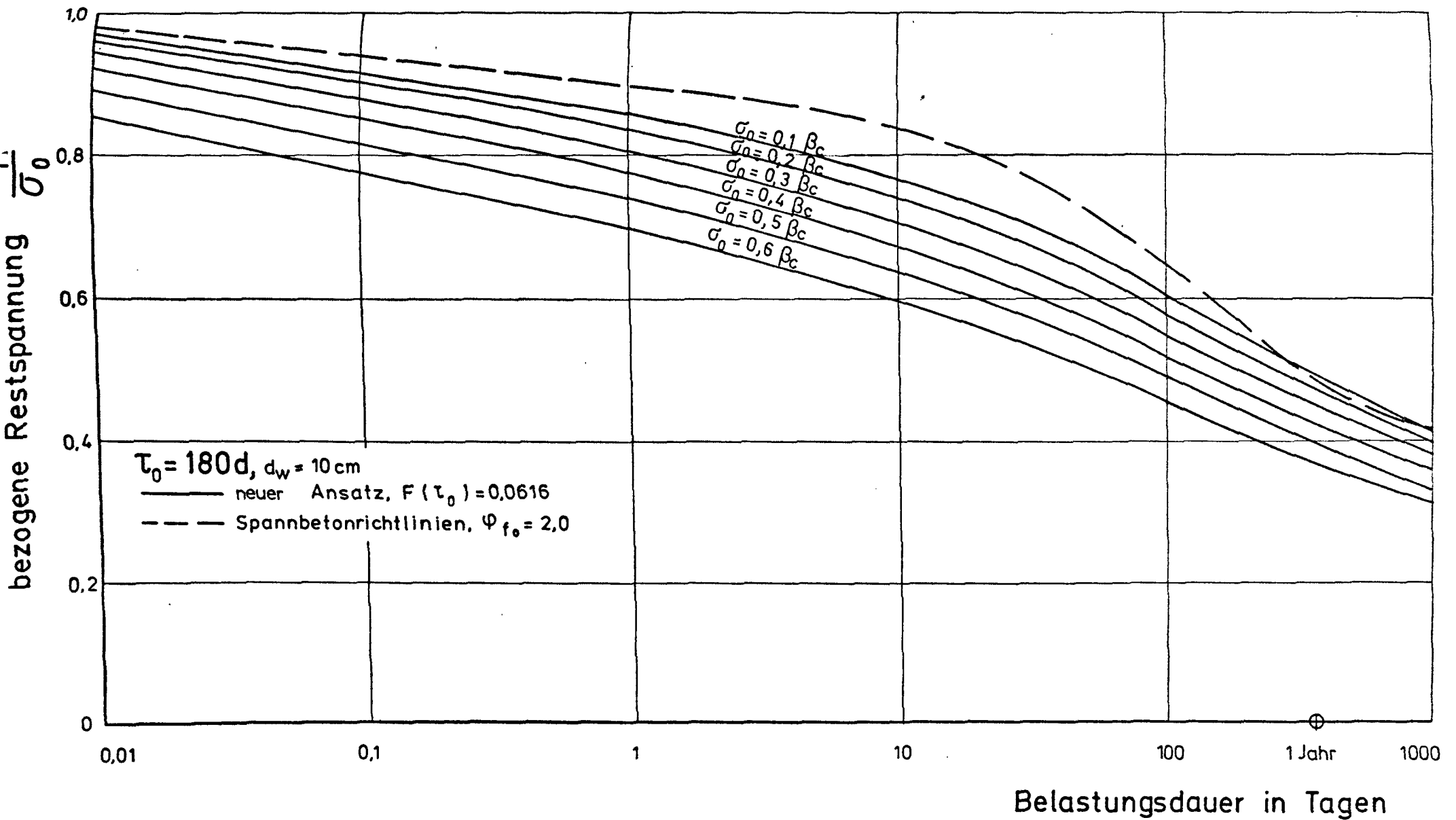


Bild 6-27 Spannungsrelaxation für $\epsilon_0 = \text{konst.}$ Vergleich von neuem Ansatz und Spannbetonrichtlinien.
 Belastungsbeginn nach 180 Tagen.

den Grenzwert $\sigma_R/\sigma_0 = 0$ hat. Negative Spannungswerte, wie sie sich beim Produktansatz nach DIN 1045 [33] (s. Haas [30]) ergeben können, können jedoch nicht auftreten, da der Dämpfer in der Maxwell-Einheit des rheologischen Modells (siehe Bild 5-1) sich allenfalls vollkommen entspannen kann. Die Parameterstudie von $\bar{\sigma}_0$ zeigt, daß die Spannung umso schneller abgebaut wird, je höher der anfängliche Belastungsgrad zum Zeitpunkt τ_0 war. Innerhalb eines Tages sinkt die Anfangsspannung für $\sigma_0 = 0,6 \beta_c$ auf 53 % ab, für $\sigma_0 = 0,1 \beta_c$ hingegen "nur" auf etwa 75 %.

Die Veränderung der Relaxationskurven durch einen späteren Belastungsbeginn zeigt Bild 6-27. Hier wurde $\tau_0 = 180$ Tage angesetzt. Der Einfluß ist offensichtlich. Die Relaxierfähigkeit ist durch die Alterung des Betons, die sich vor allem in einer erheblichen Reduzierung des Fließpotentials $F(\tau_0)$ äußert, beträchtlich abgesunken. War nach 3 Jahren Belastungsdauer die Anfangsspannung bei $\tau_0 = 28$ Tagen auf 11 bis 18 % abgesunken, so sind für $\tau_0 = 180$ d zum gleichen Zeitpunkt noch 31 bis 41 % vorhanden. Die Abweichungen zwischen der Relaxationskurve gemäß Spannbetonrichtlinien und der Relaxationskurvenschar nach dem neuen Ansatz sind für $\tau_0 = 180$ Tage nicht mehr so ausgeprägt wie für $\tau_0 = 28$ Tage.

Es soll nun an einem ausgewählten Beispiel die Güte des neuen Ansatzes im Vergleich mit den Spannbetonrichtlinien [47] und der DIN 1045 [33] überprüft werden. Besonders geeignet hierfür sind die Versuche von Rostásy, Teichen und Engelke [25], da hier sowohl Kriech- als auch Relaxationsverläufe gemessen wurden, außerdem war die Belastungsdauer sehr groß. In der Serie O von [25] wurde im Kriechversuch für $t - \tau_0 = 1000$ Tage eine Kriechzahl $\varphi = 1,765$ gemessen. Daraus läßt sich $\varphi_{fo} = 1,55$ für den Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien, $\varphi_{\infty} = 1,82$ für den Ansatz gemäß DIN 1045 und $F(\tau_0) = 0,082$ für den neuen Ansatz bestimmen. Außerdem war bekannt: $d_w = 10$ cm (es wurden Zylinder $\varnothing 20$ cm untersucht) und der Anfangsbelastungsgrad $\bar{\sigma}_0 = 0,25$. Bild 6-28 zeigt die errechneten Relaxationsverläufe sowie die gemessenen Restspannungen. Es ist offensichtlich, daß der neue Ansatz eine optimale Übereinstimmung liefert, während die übrigen Ansätze im Vergleich dazu qualitativ und quantitativ deutlich abfallen. Selbst die Abweichungen zwischen der Relaxationskurve nach dem neuen Ansatz und den Meßwerten im Anfangszeitraum lassen sich deuten. Sie sind nicht auf eine Schwäche der Theorie, sondern auf eine Schwäche des Experiments zurückzuführen. In [25] erfolgte die Regulierung der Belastung

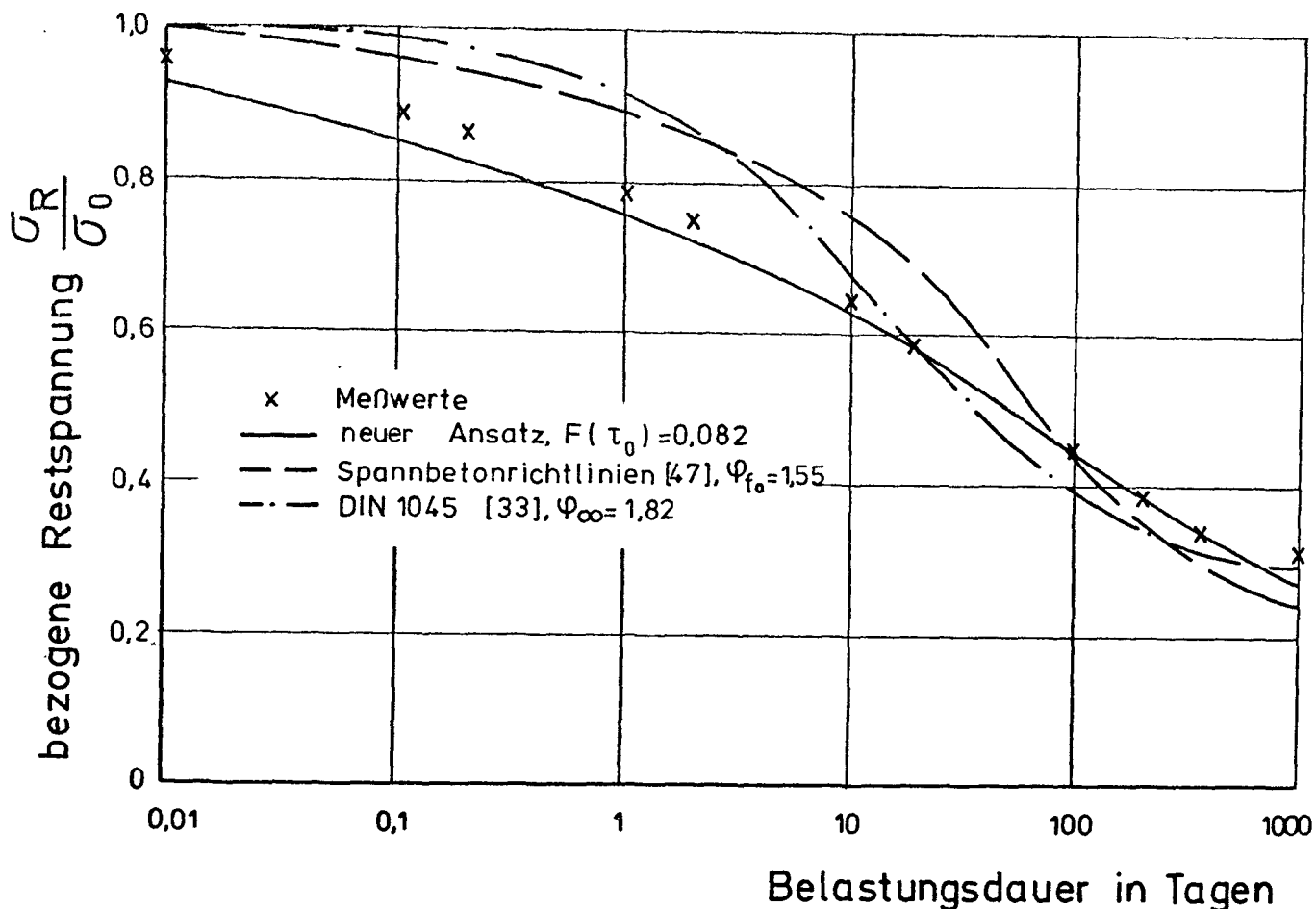


Bild 6-28 Vergleich einer gemessenen Relaxationskurve mit gerechneten Verläufen. Versuchsergebnisse aus Rostásy, Teichen, Engelke [25], Serie O. Gegeben: $\tau_0 = 28$ Tage, $d_w = 10$ cm, $\bar{\sigma}_0 = 0,25$, $\varphi(t - \tau_0 = 1000 \text{ d}) = 1,765$ (aus entspr. Kriechversuch).

manuell. Für das Ablesen der Meßuhren und die daran anschließende Regulierung der Füllmenge der in den Versuchsständen verwendeten Wasserballasttanks müssen unvermeidliche, endliche Zeiträume aufgewendet werden. Daraus resultiert eine zu spät einsetzende Spannungsregulierung, die dann logischerweise zu einem Überschätzen der tatsächlichen Relaxationsspannung führt. Dies kann man nur vermeiden, wenn man für die Steuerung der Last z. B. eine elektrohydraulische Regeleinheit verwendet, wie sie beispielsweise in den Versuchen von Rostásy und Alda [73] während der ersten 3 Stunden verwendet wurde. Es zeigt sich, daß dann die Übereinstimmung zwischen Versuchsergebnis und Rechnung gemäß dem neuen Ansatz auch im Anfangszeitraum außergewöhnlich groß ist, wie Bild 6-29 zeigt. Auch hier konnte $F(\tau_0)$ aus dem parallel durchgeführten Kriechversuch bestimmt werden.

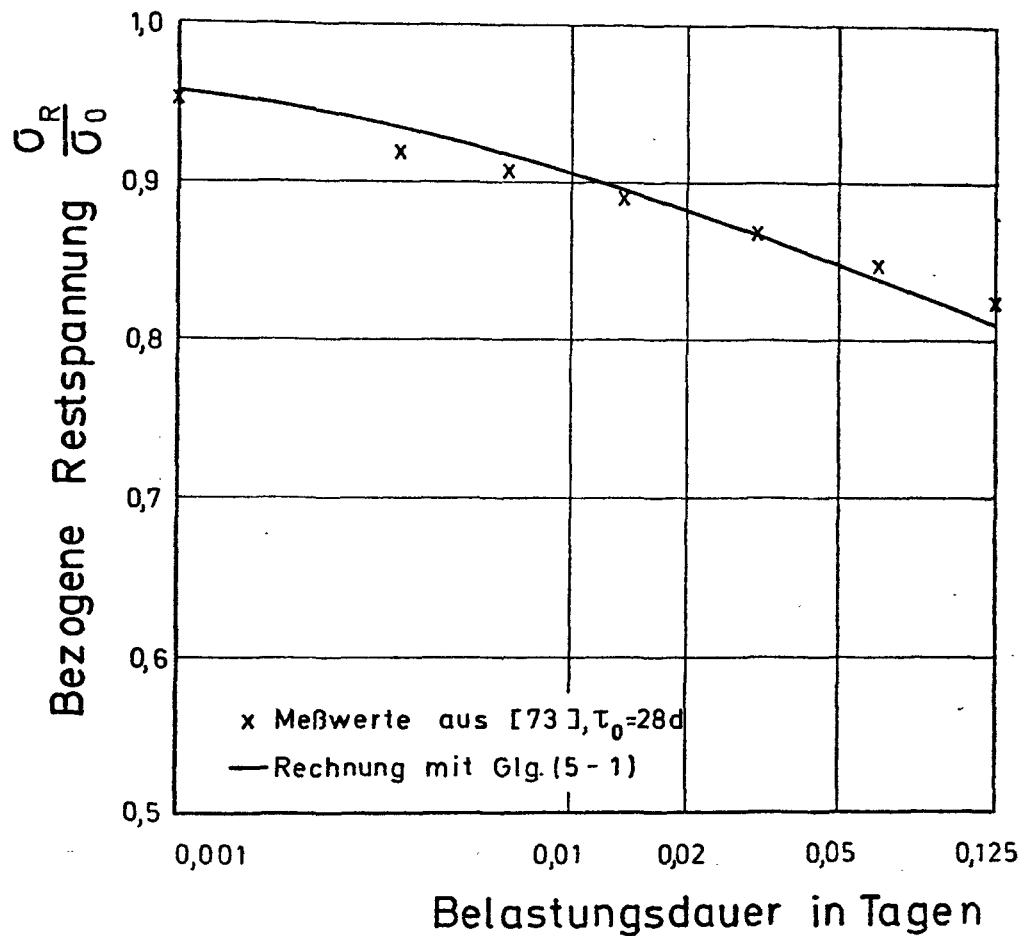


Bild 6-29 Vergleich einer gemessenen Relaxationskurve (EHR-Steuerung) mit gerechnetem Verlauf unmittelbar nach Belastungsbeginn. Versuchsergebnisse aus Rostásy und Alda [73].
 Gegeben: $\tau_0 = 28$ Tage, $d_w = 10$ cm, $\bar{\sigma}_0 = 0,33$, $F(\tau_0) = 0,086$ (aus entspr. Kriechversuch).

Man erkennt hier besonders gut, daß nur der Ansatz einer Potenzfunktion als Zeitfunktion für das Fließen in der Lage ist, diese gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch zu erzeugen. Im übrigen kann damit auch der Begriff "permanent set", der in der Literatur häufig verwendet wird (siehe z. B. Ali und Kesler [9] sowie Hansen [95]), als das ausgeprägt viskose Fließen unmittelbar nach Belastungsbeginn gedeutet werden.

7. ZUSAMMENFASSUNG

Einen wesentlichen Bestandteil der Berechnung von Stahl- und Spannbetontragwerken bildet die Prognose der Verformungen und Spannungen unter lang-einwirkenden Beanspruchungen. Diese Prognose verlangt nach wirklichkeits-nahen Beziehungen zwischen Spannung und Verformung, die aber für den visko-elastischen, heterogenen Werkstoff Beton sehr verwickelter Natur sein müs-sen und letztendlich bislang nur in Form von Arbeitshypothesen vorliegen, die wir als Kriechtheorien bezeichnen. Wesentliche Voraussetzung hierfür war die Zeitkonstanz der Einwirkungsgrößen. Es blieb hingegen im wesentli-chen ungeprüft, ob die so entwickelten Kriechtheorien dann in der Lage wa-ren, das Spannungs-Verformungsverhalten unter periodischer Beanspruchung zu beschreiben.

Ziel der Arbeit war es daher zu helfen, die Wissenslücken auf diesem Gebiet des Verformungsverhaltens zu schließen.

Hierzu wurden zunächst im zweiten Abschnitt die stoffmechanischen und rheo-logischen Grundlagen des Kriechens erläutert.

Im dritten Abschnitt wurden die bestehenden Kriechtheorien erläutert und ei-ner kritischen Betrachtung unterzogen, inwiefern sie geeignet sind, Kriechen unter veränderlicher Spannung bzw. Schwingkriechen dem phänomenologischen Er-kenntnisstand entsprechend zu beschreiben. Es wurde festgestellt, daß die Theorie der elastischen Nachwirkung, die Alterungstheorie und die Theorie der linearen Viskoelastizität mit zeitabhängigen Koeffizienten (Produktan-satz) bereits den Einstufenversuch als einfachsten Fall veränderlicher Span-nung nur mangelhaft zu beschreiben vermögen. Sie sollten daher bei verän-derlicher Spannung nicht benutzt werden. Die Theorie des reversiblen-irre-versiblen Kriechens (Summenansatz gemäß Spannbetonrichtlinien [47]) erfaßt zwar das Dehnungsverhalten im Einstufenversuch qualitativ richtig, liefert jedoch unmittelbar nach Belastungsbeginn eine wesentlich zu geringe Kriech-dehnung, da sie vor allem das Fließverhalten des Betons unzureichend erfaßt.

Alle bestehenden Kriechtheorien beinhalten die Linearität von Spannung und Dehnung, so daß sie auf Grund der tatsächlich vorliegenden Nichtlinearität einen Fehler bei der Kriechdehnungsvoraussage in Kauf nehmen, der mit zuneh-mender kriecheerzeugender Spannung progressiv wächst. Sie betrachten den Beton

grundsätzlich als einen Werkstoff, der durch eine vorherige Belastung strukturell nicht "geschädigt" wird. Durch die fehlende Differenzierung zwischen chemisch-physikalischer und mechanischer Alterung wird die Strukturviskosität des Betons fundamental unkorrekt angesetzt.

Der vierte Abschnitt der Arbeit schildert die wesentlichen Ergebnisse der wenigen Kriechversuche unter zyklischer Spannungsgeschichte. Wichtige Erkenntnisse waren dabei, daß der Druckelastizitätsmodul für $\tau_0 > 28$ Tage von der Belastungszeitfunktion unbeeinflusst bleibt, wenn die Frequenz $f < 0,1$ Hz ($T_p > 10$ Sekunden) ist und daß Größe sowie zeitlicher Verlauf der Schwingkriechdehnungen wesentlich von der Frequenz, der Höhe der Mittelspannung und der Spannungsamplitude beeinflusst werden.

Diese Erkenntnisse und die in Abschnitt 3. aufgezeigten Mängel der bestehenden Kriechtheorien ließen es notwendig erscheinen, eine modifizierte Kriechtheorie auf numerisch-theoretischem Wege zu entwickeln, die auf der Basis des reversiblen-irreversiblen Ansatzes der Spannbetonrichtlinien aufbaut. Der Gültigkeitsbereich dieses neuen Ansatzes ist durch folgende Randbedingungen gekennzeichnet:

1. Betonalter bei Belastungsbeginn: $\tau_0 \geq 28$ Tage.
2. Die Spannungszeitfunktionen wirken periodisch.
3. Frequenz $f < 0,1$ Hz ($T_p > 10$ Sekunden).
4. Maximaler Belastungsgrad $\bar{\sigma} \leq 0,6$.
5. Die klimatischen Verhältnisse während der Belastung bleiben unverändert.

Wichtigste Merkmale der neuen Theorie sind:

1. Der Elastizitätsmodul ist alters- und spannungsunabhängig.
2. Die verzögerte Elastizität ist alternd und von der Fließdehnung separierbar.
3. Das Fließen ist einer chemisch-physikalischen Alterung (Fließpotential $F(\tau_0)$) und einer mechanischen Alterung (Abnahme der Fließgeschwindigkeit mit zunehmender Belastungsdauer) ausgesetzt.
4. Kennzeichnende Größen der in bezug auf die Spannung nichtlinearen Fließfunktion sind die Belastungsdauer und der Belastungsgrad.

Aufgrund der idealisierten Dreiteilung des Verformungsverhaltens kann die neue Theorie für das Schwingkriechen durch ein rheologisches Modell symbolisiert werden, das aus einem Maxwell-Körper (Spontanelastizität + Fließen) und mehreren dazu in Reihe geschalteten Kelvin-Elementen (verzögerte Elastizität) besteht.

In Abschnitt 6. wurde die neue Kriechtheorie auf das Schwingkriechen angewendet. Als Spannungszeitfunktionen wurden Rechteck-, Dreieck- und Sinusfunktion untersucht, die als repräsentativ für in der Praxis vorkommende Belastungsfälle gelten können.

Die Auswertung lieferte die Erkenntnis, daß das Kriechen infolge periodischer Spannungen grundsätzlich durch das Kriechen infolge einer als konstant einwirkend gedachten Mittelspannung σ_m dargestellt werden kann. Das Kriechen infolge σ_m muß jedoch dann - unter bestimmten Bedingungen - durch einen Faktor η überhöht werden, der die Verformungsakkumulation infolge schwingender Spannung beschreibt. Dieser Faktor η wird als Schwingkriechfaktor bezeichnet und stellt das Verhältnis

$$\eta(t) = \frac{\epsilon_k(t, \sigma(t))}{\epsilon_k(t, \sigma_m = \text{konst.})} \approx 1$$

dar. Er liefert insofern eine ergänzende bzw. korrigierende Aussage zu den Spannbetonrichtlinien [47, 128], die es ohne Einschränkungen erlauben, das Mittel der einwirkenden Spannungen als Bestimmungsgröße für Größe und Verlauf des Schwingkriechens anzusetzen, wenn nur die Endspannung nicht mehr als 70 % von der Anfangsspannung abweicht.

Ein Schwingkriechfaktor > 1 ist vor allem dann zu erwarten, wenn

- I die Belastungszeitfunktion weitgehend einer Rechteckfunktion nahekommt,
- II die Frequenz deutlich kleiner als $f < 10^{-5}$ Hz ($T_p > 1$ Tag) ist,
- III die Belastungsdauer klein ist,
- IV der Belastungsbeginn früh erfolgt,
- V die Spannungsamplitude groß ist,
- VI die Mittelspannung klein ist und wenn
- VII die zeitabhängigen Spannungen zu Beginn der Spannungsgeschichte - während der ersten Halb- bzw. Viertelperiode - größer als σ_m sind.

Der Schwingkriechfaktor kann nur dann < 1 sein, wenn bei großer Periodendauer die Spannungen zu Beginn der Belastungsgeschichte - während der ersten Halb- bzw. Viertelperiode - kleiner als σ_m sind. Die untersuchten Parameter haben

in diesem Fall die entgegengesetzte Wirkung wie oben beschrieben. Das Schwingkriechen unter periodischen Spannungen entspricht umso eher dem Kriechen infolge $\sigma_m = \text{konst.}$, je mehr die Spannungszeitfunktion von einer Rechteckfunktion abweicht.

Vergleicht man den neuen Ansatz mit dem der Spannbetonrichtlinien und mißt diese Ansätze am Experiment, so ergeben sich folgende Feststellungen. Die Spannbetonrichtlinien zeigen bereits für den Fall konstanter Kriechspannung für geringe Belastungsdauer erhebliche Abweichungen vom Versuch, weil nach ihnen das frühe Fließen unterschätzt wird. Bei schwingender Beanspruchung ergeben sich - theoretisch und experimentell - zum Teil widersinnige Schwingkriechfaktoren η , wie an Hand von Beispielen nachgewiesen wurde. Im übrigen liefert ein Ansatz gemäß Spannbetonrichtlinien meist zu kleine η -Werte, die wegen einer ausgeprägt geringen Abhängigkeit von der Frequenz mit einer Zunahme derselben schneller gegen $\eta = 1$ streben. Die nach dem eigenen Ansatz errechneten Schwingkriechfaktoren ergeben im gesamten Bereich denkbarer Abhängigkeiten sinnvolle und vom Experiment bestätigte Werte.

Hinsichtlich des Dämpfungsverhaltens konnte eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung nach dem neuen Ansatz und Versuch festgestellt werden. Die Dämpfungsgrößen selbst sind jedoch stark von den Versuchsbedingungen und von der Frequenz abhängig. Auf die Bestimmung von Absolutwerten der Dämpfung wurde mangels geeigneter vergleichbarer Versuchsergebnisse verzichtet.

Die neue Theorie liefert eine sehr gute Übereinstimmung zwischen gerechneten und gemessenen Relaxationskurven. Sie erfaßt vor allem die Beeinflussung der Relaxationsgeschwindigkeit durch die Höhe der Anfangsspannung in zutreffender Weise. Nach den Spannbetonrichtlinien ist dies nicht möglich, da sie die Spannungsnichtlinearität des Kriechens außer Acht lassen.

Für die künftige Durchführung von Kriech- und Relaxationsversuchen läßt sich folgern, daß dem Belastungsbeginn erhöhte Aufmerksamkeit und Sorgfalt zu widmen ist. Hier ist es von erheblichem Nutzen hinsichtlich der Vergleichsmöglichkeit von Versuchen, die Randbedingungen zu vereinheitlichen, wie dies vom CEB geplant ist.

Es wäre begrüßenswert, in weiteren Kriechversuchen die Nichtlinearität des Kriechens (Fließens) zu untersuchen, vor allem auch im Zeitbereich $\tau_0 < 28$ Tage. Hier kann sicherlich die Annahme affin verzerrter Fließkurven (mit τ_0 als Parameter) nicht mehr aufrechterhalten werden. Auch die Annahme eines zeitunabhängigen Elastizitätsmoduls muß dann aufgegeben werden.

Um einen Anschluß an das Verformungsverhalten im Zeitfestigkeitsbereich zu erhalten, müßte außerdem die Annahme von Proportionalität von Spannung und Spontanelastizität entfallen. Vor allem hier fehlt es an geeigneten Versuchsergebnissen (s. Zaitzev und Wittmann [137]). Es erscheint dem Verfasser jedoch nicht möglich, in diesem Bereich das Verhalten von Zementstein unter Berücksichtigung der Zweikomponentenvorstellung auf Beton übertragen zu können, ohne dabei die wesentlichen Unterschiede in der Strukturviskosität beider Stoffe zu berücksichtigen.

SCHRIFTTUM

- [1] Ackermann, G.: Theorie der Viskoelastizität.
Beutner, M. Schriftenreihe der Bauforschung. Deutsche Bau-
information, Berlin 1972
- [2] Ruetz, W.: Das Kriechen des Zementsteins im Beton und
seine Beeinflussung durch gleichzeitiges
Schwinden.
DAfStb. Heft 183, Berlin 1966.
- [3] Bažant, Z.P.: Practical formulation of shrinkage and creep
Osman, E., of concrete.
Thonguthai, W. Matériaux et Constructions. Vol. 9 - No 54, 1970
- [4] Rüsç, H.: Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons
Jungwirth, D. auf das Verhalten der Tragwerke.
Hilsdorf, H. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 3, 1973.
- [5] Wagner, O.: Das Kriechen unbewehrten Betons.
DAfStb. Heft 131, Berlin 1958.
- [6] Neville, A.M.: Creep of Concrete; Plain, Reinforced and
Prestressed.
North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1970.
- [7] Nielsen, A.: Rheology of Building Materials
National Swedish Building Research D 6:
Stockholm 1972.
- [8] L'Hermite, R.: Retrait et fluage des bétons.
Mamillan, M. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment
et des Travaux Publics, Paris 1968.
- [9] Ali, I.: Rheology of Concrete: A Review of Research.
Kesler, C.E.: University of Illinois, Bulletin 476, Vol. 62
Number 68, 3/1965.
- [10] ACI Committee 209: Shrinkage and Creep in Concrete.
American Concrete Institute Bibliography
No. 7, 1967.
- [11] Ross, A.D.: Concrete Creep Data.
The Structural Engineer, Vol. 15, No 8 (1937).
- [12] Ulickij, I. I.: Polzucest' betona (Betonkriechen).
Kiev: Gostechizdat USSR 1948.
- [13] Illston, J. M.: The components of strain in concrete under
sustained compressive stress.
Magazine and Concrete Research 17, No 50,
1965, pp. 21-28.
- [14] Straub, L. G.: Plastic flow in Concrete Arches.
Proceedings ASCE. Vol. 95 (1931).

- [15] Shank, J. R.: The Plastic Flow of Concrete.
Ohio State University Eng. Exp. Sta. Bull.
No 91 (1935).
- [16] Wittmann, F.: Vergleich einiger Kriechfunktionen mit Ver-
setzer, M. suchsergebnissen.
Cement and Concrete Research Vol. 1, 1971,
pp. 679 - 690.
- [17] Bažant, Z.P.: On the choice of Creep Function for Standard
Osman, E.M.: Recommendations on Practical Analysis of
Structures.
Cement and Concrete Research Vol. 51975.
- [18] Bažant, Z.P.: Double power law for basic creep of concrete.
Osman, E.M. Mat. et Constr. Rilem Vol. 9, No. 49, 1976.
- [19] Friedrich, E.: Über das Schwinden und Kriechen des Betons.
Österreichische Bauzeitschrift, 5. Jg., H. 8
und 10 (1950).
- [20] Hanson, J. A.: A 10-Year Study of Creep Properties of Concrete
U.S. Department of the Interior Bureau of
Reclamation. Denver Colorado, Juli 1953.
- [21] Maréchal, J.-C.: Le fluage du béton en fonction de la tempéra-
ture.
Mat. et Constr. Rilem Vol. 2, No. 8, 1969.
- [22] Kimishima, H.: Creep and Creep Recovery of Mass Concrete.
Kitahara, Y. Technical Laboratory, Central Research
Institute of Electric Power Industry,
Tokyo 1964.
- [23] McDonald, J. E.: Beitrag zu ACI - Seminar on Concrete for
Nuclear Reactor.
Berlin 4. - 11. Oktober 1970.
- [24] Lorman, W.R.: Theory of Concrete Creep.
Proceeding ASTM, Vol. 40 (1940).
- [25] Rostásy, F.S.: Beitrag zur Klärung des Zusammenhanges von
Teichen, K.-Th. Kriechen und Relaxation bei Normalbeton.
Engelke, H. Straßenbau und Straßenverkehrstechnik,
Heft 139, 1972.
- [26] Dischinger, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die
elastische Verformung und das Kriechen des Be-
tons bei Bogenbrücken.
Bauingenieur H. 33/34/35/36/39/40, 1937.
- [27] Arutyunyan, N.KH.: Some Problems in the Theory of Creep.
Pergamon Press, 1966.

- [28] Trost, H.: Spannungs-Dehnungs-Gesetz eines visko-elastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerke aus Stahlbeton und Spannbetonbeton, Herstellung und Verwendung, Heft 6, 196
- [29] Bažant, Z.P.:
Wu, S.T. Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete.
Journal of the Engineering Mechanics Division 4/1973.
- [30] Haas, W.: Über ein für die EDV geeignetes Verfahren zur Erfassung des Kriechens und Schwindens von Beton.
Dissertation Universität Stuttgart 1974.
- [31] Pfefferle, R.: Zur Theorie des Betonkriechens.
Dissertation Karlsruhe, 1971.
- [32] Hansen, T.C.:
Mattock, A.H. Influence of size and shape of member on the shrinkage and creep of concrete.
American Concrete Institute Journal Proc. Vol. 63, 1966.
- [33] DIN 1045: Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung.
Fassung Januar 1972.
- [34] Kajfasz, S.:
Szulc, J. Approximation of Experimental Data by a Creep Function.
Matériaux et Constructions, Rilem, Vol. 3, No. 18, 1970.
- [35] Nowacki, W.: Theorie des Kriechens, Lineare Viskoelastizität
Franz. Deuticke, Wien, 1965.
- [36] Flügge: Viskoelasticity.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
- [37] Schade, D.: Einige eindimensionale Ansätze zur Berechnung des Kriechens und der Relaxation.
Beton- und Stahlbetonbau Heft 3, 1972.
- [38] Magnus, K.: Schwingungen.
Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1961.
- [39] Bažant, Z.P.:
Najjar, L. J.: Comparison of Approximate Linear Methods for Concrete Creep.
Journal of the Structural Division, 9/1973, pp. 1851 - 1874.
- [40] Onat, E.T.: Description of Mechanical Behaviour of Inelastic Solids.
Proceedings of the 5th U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 421 - 433.
- [41] Boltzmann, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkungen.
Annalen der Physik und Chemie.
Ergänzungs-Band 7, 1876, S. 624 ff.

- [42] Mc Henry, D.: A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design.
Proceedings ASTM 43, 1943, pp. 1069 ff.
- [43] Argyris, J.H.: Thermomechanical Creep of Aging Concrete -
Pister, K.S. A Unified Approach.
Willam, K.J. IVBH - Vol. 36-I, Zürich, 1976.
- [44] Ross, A.D.: Creep of Concrete Under Variable Stress.
Journal ACI, Vol. 29, 1958.
- [45] England, G.L.: Numerical Creep Analysis Applied to Concrete Structures.
Journal ACI, Vol. 64, 1967.
- [46] ACI Committee 209: Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures, Designing for Effects of Creep, Shrinkage and Temperature.
ACI Special Publication 27, 1971.
- [47] DIN 4227: Richtlinien für Bemessung und Ausführung von Spannbetonbauteilen.
Fassung Juni 1973.
- [48] Rüsç, H.: Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und
Jungwirth, O. Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke,
Band 2.
Werner-Verlag, Düsseldorf, 1976.
- [49] CEB Bulletin d'information, No. 80, 2/1972.
- [50] CEB Bulletin d'information, No. 94, 8/1973.
- [51] CEB Bulletin d'information, No. 97, 11/1973.
- [52] CEB Bulletin d'information, No. 111, 10/1975.
- [53] CEB Bulletin d'information, No. 117-D, 12/1976.
- [54] Franke, L.: Einfluß der Belastungsdauer auf das Verbundverhalten von Stahl in Beton (Verbundkriechen).
Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 268, Berlin, 1976.
- [55] Rabotnov, J. N.: Kriechen von Bauteilen (in russ. Sprache).
Izd.-Vo "Nauka"; Gl. Red. Fiz.-mat. Lit. Moskau, 1966.
- [56] Volterra, V.: Leçons sur les Fonctions de Lignes.
Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, Paris, 1913.
- [57] Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.
Birkhäuser Verlag, Basel u. Stuttgart, 1976.
- [58] Kruppe, J.: Untersuchung des zeitabhängigen zweidimensionalen Spannungszustandes in der Betonplatte einer vor gespannten Verbundkonstruktion.
Dissertation, Braunschweig, 1974.

- [59] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton.
Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10+11/1967.
- [60] Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. 7. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Gees & Portig K.-G., Leipzig, 1971
- [61] Bronstein, J. N.: Taschenbuch der Mathematik. 4. Auflage.
Semendjajew, K.A. Verlag Harri Deutsch Frankfurt/M. u. Zürich, 1964.
- [62] Schade, D.: Elektronische Berechnung der Auswirkungen von Haas, W. Kriechen und Schwinden bei abschnittsweise hergestellten Verbundstabwerken.
Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 244, 1979.
- [63] Rüschi, H.: Second Discussion of the Paper "On the Choice of Jungwirth, D. Creep Function for Standard Recommendations on Practical Analysis of Structures.
Hilsdorf, H.K. Cement and Concrete Research, Vol. 7, pp. 111 - 118, 1977.
- [64] Rostásy, F.S.: Über das Schwinden und Kriechen von Leichtbeton bei unterschiedlicher Korneigenfeuchtigkeit
Teichen, K.-Th. Alda, W. beton, Herstellung u. Verwendung, Heft 6, 1974
- [65] Komendant, G.J.: Study of Concrete Properties for Prestressed
Polivka, M. Concrete Reactor Vessels.
Pirtz, D. Report No. UC SESM 76-3, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California, April 1976.
- [66] Wesche, K.: Kriechen von Beton - Einfluß des Belastungsalts
v. Berg, W. beton, Herstellung u. Verwendung, Heft 1, 1977
Schrage, I.
- [67] Dilger, W.: Time-Dependent Forces Induced by Settlement in
Ghali, A. Continuous Prestressed Concrete Structures.
Kountouris, C. Vorbericht zum Symposium Madrid 1970 der I.V.B.H. Zürich, 1970.
- [68] Rüschi, H.: Closing Remarks.
Vortrag auf dem Mc Henry Symposium
- [69] Haas, W.: A Discussion of the Paper [17].
Cement and Concrete Research, Vol. 6, 1976, pp. 155 - 158.
- [70] Haas, W.: Reply to Rüschi, Jungwirth and Hilsdorf's
Second Discussion of the Paper [17],
Cement and Concrete Research, Vol. 7, 1977, pp. 131 - 134.

- [71] Bažant, Z. P.:
Osman, E. M. Reply to Rüşch, Jungwirth and Hilsdorf's
Discussion of the Paper [17].
Cement and Concrete Research, Vol. 5, 1975,
pp. 635 - 642.
- [72] Bažant, Z. P.:
Osman, E. M. Reply to Rüşch, Jungwirth and Hilsdorf's
Second Discussion of the Paper [17].
Cement and Concrete Research, Vol. 7, 1977,
pp. 119 - 130.
- [73] Rostásy, F.S.:
Alda, W. Untersuchung über das rheologische Verhalten
von jungem Beton unter einaxialer Zug- und
Druckbeanspruchung.
Versuchsbericht des Otto-Graf-Institutes,
Stuttgart, zum Forschungsvorhaben Ro 288/2 der
DFG, 1976.
- [74] Rostásy, F. S.:
Alda, W. Kriechen und Schwingkriechen von Leichtbeton.
Der Bauingenieur 50 (1975), S. 455 - 459.
- [75] Bažant, Z. P.: Langzeitige Durchbiegungen von Spannbeton-
brücken infolge des Schwingkriechens unter Ver-
kehrslasten.
Beton- und Stahlbetonbau 12/1968.
- [76] Probst, E.: The influence of rapidly alternating loading on
concrete and reinforced concrete.
The Structural Engineer 9, 1931, pp. 410-429.
- [77] Probst, E.: Plastic flow in plain and reinforced concrete
arches.
ACI Journal, Proc. 30, 1933, pp. 137 - 141.
- [78] Le Camus, B.: Recherches sur le comportement du béton et du
béton armée soumis à des efforts répétés.
Circulaire Série F, No. 27, Inst. Technique
du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris,
Juillet 1946.
- [79] L'Hermite, R.: What do we know about the plastic deformation
and creep of concrete?
RILEM Bulletin No. 1, März 1959, pp. 21 - 51.
- [80] Gvozdev, M. A.: Creep of concrete in: Mekhanika Tverdogo Tela,
Moskau, 1966, pp. 137 - 152.
- [81] Davis, R. E.:
Davis, H. E. Flow of concrete under the action of sustained
loads.
ACI Journal, Proc. 27, 1931, pp. 837 - 901.
- [82] Bernhardt, C.J.: Creep and Shrinkage of Concrete.
Matériaux et Constructions, Vol. 2. - No. 8, 196
- [83] Gaede, K.: Versuche über die Festigkeit und die Verformung
von Beton bei Druck-Schwellbeanspruchung.
Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 144,
Berlin, 1962.

- [84] Mehmel, A.:
Kern, E. Elastische und plastische Stauchungen von Beton infolge Druckschwell- und Standbelastung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 153, Berlin, 1962.
- [85] Whaley, C. P.:
Neville, A. M. Non-elastic deformation of concrete under cyclic compression. Magazine of Concrete Research, Vol. 25, No. 84, 9/1973.
- [86] Badawy, Y. K. M.: Näherungsformeln für das Verhalten von Beton unter Wechselbelastung. Dissertation D 17, T.H. Darmstadt, 1965.
- [87] Mathur, J. N.: Creep Study of Plain Concrete under Dynamic and Static loads. M. Eng. Thesis, Carleton University, Ottawa, 1970.
- [88] Tsui, S. H.: Comparative Creep Study of Plain Concrete under Dynamic and Static Loads. M. Eng. Thesis, Carleton University, Ottawa, 1971.
- [89] Mickleborough, N.C.: Creep of Concrete under Variable Loading. M. Eng. Thesis, Carleton University, Ottawa, 1972.
- [90] Kwong, W. K.: Creep of Concrete Subjected to Various Loading. M. Eng. Thesis, Carleton University, Ottawa, 1973.
- [91] Suter, G. T.:
Mickleborough, N.C. Creep of Concrete under cyclically varying dynamic loads. Cement and Concrete Research. Vol. 5, 1975, pp. 565 - 576.
- [92] Rostásy, F. S.:
Teichen, K.-Th.
Alda, W. Beitrag zur Klärung des Zusammenhanges zwischen Kriechen, Relaxation und Dämpfung von Leichtbeton. Versuchsbericht des Otto-Graf-Institutes, Universität Stuttgart, 1973.
- [93] Rostásy, F. S.:
Alda, W. Das Verhalten von Leichtbeton unter zyklischer Druckschwellbeanspruchung. Versuchsbericht des Otto-Graf-Institutes, Stuttgart, 1975.
- [94] Teichen, K.-Th.: Über die innere Dämpfung von Beton. Heft 38 der Schriftenreihe des Otto-Graf-Institutes, Universität Stuttgart, 1968.
- [95] Hansen, T. C.: Creep and Stress Relaxation of Concrete. Proceeding Nr. 31, Stockholm 1960. (Swedish Cement and Concrete Research Institute at the Royal Institute of Technology, Stockholm).

- [96] Yokomichi, H.: Rheological Study on Deformations of Concrete. Proceedings of the Japanese Cement Engineering Association. Review of the XVIII General Meeting, 1964, pp. 189 - 195.
- [97] Yokomichi, H.: On Instantaneous Deformation of Concrete. Kakuta, Y. Proceedings of the Japanese Cement Engineering Association. Review of the XXI General Meeting, 1967, pp. 238 - 241.
- [98] Yokomichi, H.: Rheological Behaviour of Concrete under Short-time Loading. Concrete Journal (Japan), Vol. 12, No. 11, 1974.
- [99] Freudenthal, A.: Inelastisches Verhalten von Werkstoffen. VEB-Verlag Technik, Berlin, 1955.
- [100] DIN 1342 Viskosität Newton'scher Flüssigkeiten. Ausgabe Dezember 1971.
- [101] Hieke, H.: Beitrag zum Deformationsverhalten und zur Technologie der Kunststoffe im Hinblick auf ihre Verwendung im konstruktiven Ingenieurbau. Dissertation Aachen, 1968.
- [102] Lühr, H. P.: Resonanzfrequenzmessungen an im Wasser und aggressiven Lösungen gelagerten Mörtelprismen. Dissertation T.H. Aachen, 1964.
- [103] Brunarski, L.: Recommendations for the use of resonance methods for testing concrete. Matériaux et constructions, Vol. 2, No. 10, 1969.
- [104] Pickett, G.: Equations for computing elastic constants from flexural and torsional resonant frequencies of vibrations of prisms + cylinders. ASTM Proceedings, Vol. 45, pp. 846 ff, 1945.
- [105] Roll, F.: Long-Time Creep-Recovery of Highly Stressed Concrete Cylinders. Symposium on Creep of Concrete. ACI-Publication SP-9, 1964.
- [106] Mamillan, M.: Etude sur le fluage du béton. Ann. Inst. Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris, Febr. 1959, pp. 221 - 233.
- [107] Mullick, A. K.: Effects of Stress-History on the Microstructure and creep properties of maturing concrete. PHD-Thesis, Calgary/Alberta, Canada, March 1972.
- [108] Freudenthal, A. M.: The inelastic behaviour of engineering materials and structures. John Wiley & Son., New York, 1950.

- [109] Ali, I.: Mechanismus of Creep in Concrete.
Kesler, E. Symp. on Creep of Concrete, ACI Special-Publication No. 9, 1964, pp. 35 - 57.
- [110] Gamble, B. R.: The creep of maturing concrete subjected to
Thomass, L. H. time-varying stress.
Proceeding, Second Australasian Conference
on the Mechanics of Structures and Materials,
Adelaide, 1969.
- [111] Warner, R. F.: Non-Linear Creep in Concrete Columns.
Symposium IVBH, 1970, Madrid, Band 6.
- [112] Bažant, Z. P.: Zuschrift zu:
"On the Applicability of Modified Dischinger
Equations" von L. F. Nielsen.
Cement and Concrete Research, Vol. 8, 1978.
- [113] Nielsen, L. F.: On the Applicability of Modified Dischinger
Equations.
Cement and Concrete Research, Vol. 7, 1977.
- [114] Rüsç, H. : Die Grundlagen für die Berechnung der Folgen
des Betonkriechens.
Symposium IVBH, 1970, Madrid, Band 6.
- [115] England, G. L.: Methods of Computing Stress in Concrete from a
Illston, J. M. History of Measured Strain.
Civil Engineering and Public Works Review
4/1965.
- [116] Seki, S.: Creep of Concrete at elevated Temperatures.
Kawasumi, M. ACI Special Publication SP 34-32, 1970.
- [117] Jessop, E. L.: Creep and Creep Recovery in Concrete Materials.
PHD-Thesis, Calgary/Kanada, März 1969.
- [118] Bažant, Z. P.: Reply to Rüsç, Jungwirth and Hilsdorf's Second
Osman, E. M. Discussion of the Paper "On the choice of Creep
Function for Standard Recommendations on
Practical Analysis of Structures".
Cement and Concrete Research, Vol. 7/1977.
- [119] Rüsç, H.: Der Einfluß des mineralogischen Charakters der
Kordina, K. Zuschläge auf das Kriechen von Beton.
Hilsdorf, H. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 146,
1962.
- [120] Meyers, B. L.: The creep response of reloaded concrete specimens.
Maity, K. Mechanical behaviour of materials, Vol. 4:
Concrete and cement, paste, glass and ceramics,
Kyoto, Soc. Mater. Sci. 1972, pp. 234 - 242.
- [121] Freudenthal, A. M.: Creep and Creep Recovery of Concrete under
Roll, F. High Compressive Stress.
ACI Journal 6/1958.

- [122] Krüger, W.: Kriechberechnungen bei Stahlbetonelementen. Deutscher Bauinformation, Reihe Stahlbeton, Heft 25, Berlin, 1973.
- [123] Haas, W.: Zuschrift zu [17]. Cement and Concrete Research, Vol. 6, 1976, pp. 155 - 158.
- [124] Haas, W.: Zuschrift zu [17]. Cement and Concrete Research, Vol. 7, 1977, pp. 131 - 134.
- [125] Gamble, B. R.: A Constitutive Relationship for Maturing Concrete. Symposium IVBH, 1970, Madrid, Band 5.
- [126] Chang, Ch. S.: Prediction of Creep Behaviour in Concrete from Kesler, C. E. Sonic Properties. Materials and Construction. Highway Research Board, Proceedings 35, 1956, Annual Meeting, pp. 436 - 443.
- [127] Browne, R. D.: The Influence of Loading Age and Temperature Blundell, R. on the Long term Creep Behaviour of Concrete in a Sealed, Moisture Stable, State. Materials and Structures (RILEM), Vol. 2, 1969, pp. 133 - 143.
- [128] DIN 4227: Spannbeton, Teil 1: Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter und voller Vorspannung. Manuskript der Neufassung des Normenausschusses Bauwesen, März 1978.
- [129] Lewandowski, R.: Beziehungen zwischen Zylinder- und Würfel-druckfestigkeit des Betons. Betonstein-Zeitung, Heft 9/1971.
- [130] Lockett, F. J.: Nonlinear Viscoelastic Solids. Academic Press, London, New York, 1972.
- [131] Frank, Th., Zur Erfassung von Kenngrößen für das Belastungs- Kunze, W.: und Verformungs-Verhalten und die innere Dämpfung von Beton während der laufenden Dauerschwingunter-suchung. Materialprüfung 19 (1977) Nr. 1 Januar.
- [132] DIN 13 342 Nicht-newtonsche Flüssigkeiten; Begriffe, Stoff-gesetze. Berlin und Köln, 1976.
- [133] Borkenstein, D.: Beitrag zur Ermittlung der Kriechumlagerungen von Zwangsschnittgrößen in Betontragwerken - Hypothe-sen und Berechnungsverfahren. Dissertation Aachen, 1972.

- [134] CEB-FIP: Internationale Richtlinien zur Berechnung und Ausführung von Betonbauwerken.
2. Auflage, London, 1970.
- [135] Bažant, Z.P.: Zuschrift zu [4].
Beton- und Stahlbetonbau, Heft 6, 1974, S. 150 ff.
- [136] Neville, A.M.: Hardened Concrete: Physical and Mechanical Aspects.
ACI Monograph Nr. 6, 1971.
- [137] Zaitsev, J.,
Wittmann, F.: Zur Dauerfestigkeit des Betons unter konstanter Belastung.
Der Bauingenieur 46 (1971), Heft 3.